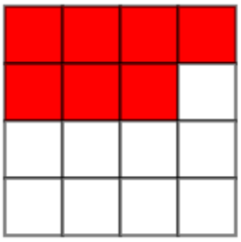
Les Fractions

I) Définition et vocabulaire

Lorsque l'on **partage un objet en parts égales**, on peut représenter une ou plusieurs de ces parts sous la forme d'une **fraction**.



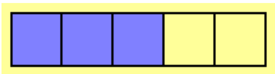
Exemple : Ici par exemple, nous avons faits **16 parts égales** et nous en avons **coloriées 7**.
On peut représenter cette quantité par la fraction :

$$\frac{7}{16}$$

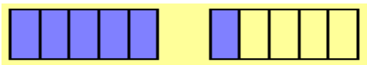
Nombre de parts coloriées

Nombre total de parts

Exemples :

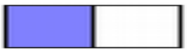


On a représenté la fraction $\frac{3}{5}$ et on lit "trois cinquièmes".
Le numérateur est 3 et le dénominateur est 5.



On a représenté la fraction $\frac{6}{5}$ et on lit "six cinquièmes.
Le numérateur est 6 et le dénominateur est 5.
Le numérateur étant plus grand que le dénominateur, il a fallu ici prendre plus qu'un seul objet à partager.

Fractions particulières :



On a représenté $\frac{1}{2}$ et on lit "un demi".

On a représenté $\frac{1}{3}$ et on lit "un tiers".

On a représenté $\frac{1}{4}$ et on lit "un quart".

Définition : Lorsqu'on divise en parts égales, on peut représenter le résultat sous la forme d'une **fraction** $\frac{a}{b}$.

Le nombre **a** est appelé le **numérateur** : c'est le **nombre de parts coloriées.**
Le nombre **b** est appelé le **dénominateur** : c'est le **nombre total de parts.**

II) Ecriture fractionnaire ou écriture décimale

Lorsqu'on fait des parts égales, on effectue en fait une division. Le quotient (résultat) de cette division peut s'écrire sous la forme d'un nombre décimal.
Exemple : $10 \div 4 = 2{,}5$
Mais on peut également choisir de représenter ce quotient avec une autre écriture :

l'**écriture fractionnaire.** Dans notre cas on aura : $10 \div 4 = \frac{10}{4}$

Propriété : Une **écriture fractionnaire** est une autre manière de représenter la résultat d'une division : $\boxed{a \div b = \dfrac{a}{b}}$.

Le quotient d'une division **peut donc s'écrire de 2 manières différentes** : soit en **écriture décimale**, soit en **écriture fractionnaire**.

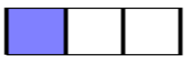
Exemples :

On a représenté $1 \div 4$

$1 \div 4 = 0{,}25 \longrightarrow$ **écriture décimale**

$1 \div 4 = \dfrac{1}{4} \longrightarrow$ **écriture fractionnaire**

Remarque : Lorsqu'on effectue certaines divisions, elles sont infinies (exemple : $1 \div 3 \approx 0{,}333...$). **Ces quotients ne sont donc pas des nombres décimaux**. Par contre, on peut toujours écrire ces quotients avec une écriture factionnaire $1 \div 3 = \dfrac{1}{3}$



On a représenté $1 \div 3$

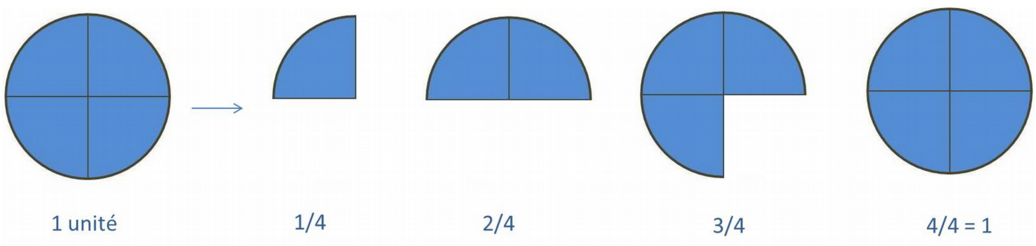
$1 \div 3 \approx 0{,}33... \longrightarrow$ **Ne se termine pas : ~~Pas un nombre décimal~~**

$1 \div 3 = \dfrac{1}{3} \longrightarrow$ **écriture fractionnaire**

III) Fraction et inverse de la multiplication

Lorsqu'on partage une unité en 4, on obtient $1 \div 4 = \dfrac{1}{4}$.

On s'aperçoit qu'il faut 4 de ces mêmes fractions pour reformer l'unité :

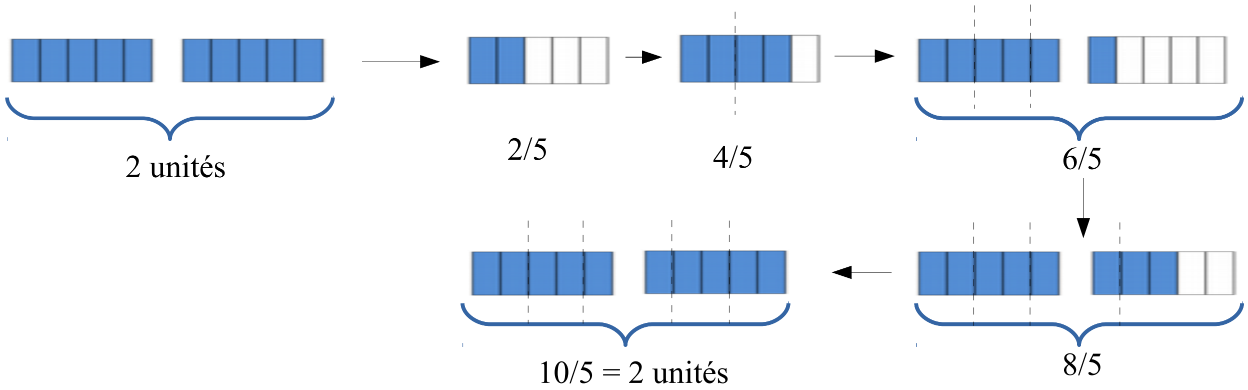


Ainsi $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 4 \times \dfrac{1}{4} = 1$

Donc la fraction $\dfrac{1}{4}$ est le nombre qui multiplié par **4** donne **1** : $4 \times ? = 1$ $\qquad \dfrac{1}{4}$

On a donc : $4 \times \dfrac{1}{4} = 1$

De même, lorsqu'on partage 2 unités en 5, on obtient : $2 \div 5 = \frac{2}{5}$. On s'aperçoit qu'il faut 5 de ces mêmes fractions pour reformer les 2 unités de départ :



Ainsi $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 5 \times \frac{2}{5} = 2$

$\frac{2}{5}$

Donc la fraction $\frac{2}{5}$ est le nombre qui multiplié par **5** donne **2 :** $5 \times ? = 2$

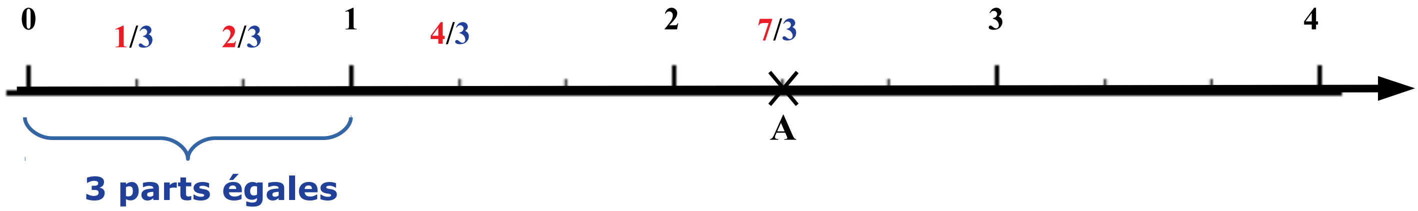
On a donc : $5 \times \frac{2}{5} = 2$

IV) Fraction et demi-droite graduée

On peut placer des fractions sur une demi-droite graduée. On divise alors l'unité (le nombre 1) en un nombre de parts égales correspondant au dénominateur de la fraction.

<u>Exemple</u> : Placer la fraction $\frac{7}{3}$ sur une demi-droite graduée.

On commence par tracer une demi-droite graduée en plaçant le nombre 0 sous l'origine puis les nombres entiers 1, 2, 3 ...
On partage l'unité (le segment allant jusqu'au nombre 1) en **3 parts égales (dénominateur de la fraction à placer)** puis on gradue le reste de la même façon. Il ne reste plus qu'à placer la fraction.



On dit que l'abscisse du point A est $\frac{7}{3}$.

On constate que cette fraction est comprise entre les nombres 2 et 3 : $2 < \frac{7}{3} < 3$

On constate aussi que la fraction $\frac{7}{3}$ est située à $\frac{1}{3}$ de plus que le nombre 2 :

$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

On retrouve le quotient (**2**) et le reste (**1**) de la division euclidienne de **7** par **3** :
$7 = 3 \times 2 + 1$

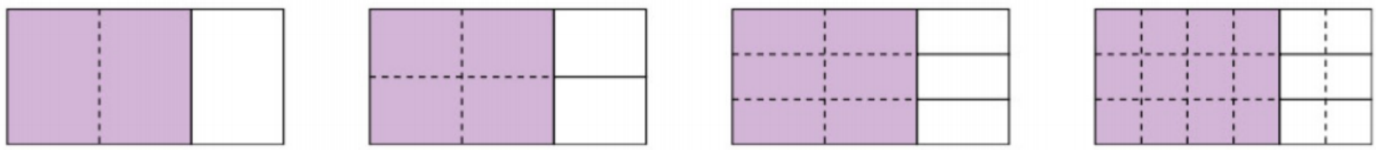
Remarque : En plaçant plusieurs fractions sur une même demi-droite graduée, on peut ainsi les comparer. (on peut voir par exemple ici que $\frac{4}{3} < \frac{7}{3}$)

V) Egalité de quotients

Une même quantité peut être représentée par plusieurs fractions différentes.

Propriété : Un quotient ne change pas lorsqu'on **multiplie** (ou divise) son numérateur ou son dénominateur par un **même nombre** (différent de zéro) : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

Exemple
Voici différentes fractions égales à $\frac{2}{3}$.



$\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{12}{18}$

On a donc 4 fractions représentant le même quotient :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{12}{18}$$

On remarque que l'on peut passer d'une fraction à une autre en multipliant à la fois le numérateur et le dénominateur par le même nombre (par **2** ou par **3** ou par **6**)

VI) Simplification d'une fraction

Définition : **Simplifier** (ou réduire) une fraction signifie l'**écrire** (lorsque c'est possible) **avec un numérateur et un dénominateur plus petit**. Lorqu'on ne peut plus simplifier une fraction, on dit alors qu'elle est **irréductible**.

Exemple : $\frac{6}{9} \overset{:3}{=} \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{25}{15} \overset{:5}{=} \frac{5}{3}$

on a divisé le haut et le bas par 3 $\qquad$ on a divisé le haut et le bas par 5

VII) Multiplication d'une fraction par un nombre

Propriété : Prendre une fraction d'un nombre, c'est multiplier cette fraction par ce nombre.

Exemple : Calculer les $\frac{3}{5}$ de **200** revient à faire le calcul suivant : $\frac{3}{5} \times 200$

Il y a ensuite 3 méthode pour effectuer ce calcul :

Méthode 1 : on partage le nombre **200** en **5** puis on **multiplie par 3** :

(**200 : 5**) × **3** = 40 × **3** = 120

Méthode 2 : on calcule le quotient **3 : 5** puis on **multiplie** par le nombre **200** :

(**3 : 5**) × **200** = 0,6 × **200** = 120

Méthode 3 : on **multiplie** **3** par le nombre **200** puis on **divise par 5**:

(**3** × **200**) **: 5** = 600 **: 5** = 120

VIII) Pourcentages

Définition : Si **a** est un nombre, la fraction $\frac{a}{100}$ peut se noter " **a %"** et se lit " **a pour cent** ".

Exemples : $\frac{25}{100} = 25\,\%$ $\frac{12}{100} = 12\,\%$ $\frac{7}{100} = 7\,\%$

Propriété : Calculer le pourcentage d'un nombre revient à multiplier ce pourcentage par ce nombre.

Exemple : 40 % des 25 élèves de la classe sont des garçons. Combien y a t-il de garçons ?

Calculer 40% de 25 élèves revient à effectuer le calcul $40\,\% \times 25 = \frac{40}{100} \times 25$

On utilise ensuite une des 3 méthodes vues dans le paragraphe précédent :

(**40** × **25**) **: 100** = 1000 **: 100** = 10. Donc 10 élèves dans la classe sont des garçons.