Arithmétique

Dans ce chapitre nous étudierons les relations qu'il existe entre les **nombres entiers**.

I) Multiples et diviseurs

Définition : Soient *a* et *b* 2 nombres entiers.
On dit que le nombre *a* est un **multiple de** *b* lorsqu'il est **dans la table de multiplication de** *b*.

Exemple : 24 est un multiple de 4 (car 24 = 4 × 6).

Définition : Soient *a* et *b* 2 nombres entiers.
On dit que le nombre *a* est un **diviseur de** *b* (ou que *a* divise *b*) lorsque le **reste de la division euclidienne** de *b* par *a* **vaut zéro**.

Remarque : Cela veut dire que la division de *b* par *a* donne un **résultat entier**.

Exemples : 1, 2, 4, 8, 16 et 32 sont tous les diviseurs de 32. (32 : 1 ou 32 : 2 … donnent des résultats entiers.

Par contre 5 n'est pas un diviseur de 32 car 32 : 5 = 6,4 qui n'est pas entier.

Remarque : Si *a* est un multiple de *b* alors *b* est un diviseur de *a* (et inversement).

Exemple : 40 est un multiple de 8 (car 40 est dans la table de 8 : 40 = 8 × 5) donc 8 est un diviseur de 40 (en effet 40 : 8 = 5 qui est entier)

Méthode : comment trouver tous les diviseurs de 156 :

		Liste des diviseurs :
156 : 2 = 78	Donc **2** est un diviseur de 156 ainsi que **78**.	1, 2, 78, 156
156 : 3 = 52	Donc **3** est un diviseur de 156 ainsi que **52**.	1, 2, 3, 52, 78, 156
156 : 4 = 39	Donc **4** est un diviseur de 156 ainsi que **39**.	1, 2, 3, 4, 39, 52, 78, 156
156 : 5 = 31,2	Donc 5 n'est pas un diviseur de 156.	
156 : 6 = 26	Donc **6** est un diviseur de 156 ainsi que **26**.	1, 2, 3, 4, 6, 26, 39, 52, 78, 156
156 : 7 ≈ 22,3	Donc 7 n'est pas un diviseur de 156.	
156 : 8 = 19,5	Donc 8 n'est pas un diviseur de 156.	
156 : 9 ≈ 17,3	Donc 9 n'est pas un diviseur de 156.	
156 : 10 = 15,6	Donc 10 n'est pas un diviseur de 156.	
156 : 11 ≈ 14,2	Donc 11 n'est pas un diviseur de 156.	1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156
156 : 12 = 13	Donc **12** est un diviseur de 156 ainsi que **13**.	

Il ne peut plus y avoir d'autres diviseurs car on connaît aussi les diviseurs plus gands que 12.

II) Nombres premiers

On peut constater que tous les nombres ont, au minimum, 2 diviseurs : 1 et eux même. Par exemple le nombre 29 est dans la table de 1 et 29 donc 1 et 29 sont des diviseurs de 29.
Il y a quand même une exception : le nombre 1 n'a qu'un seul diviseur, lui même.

Définition : On dit qu'un nombre est **premier** lorsqu'il **possède exactement 2 diviseurs** : 1 et lui même.

Exemples : Le nombre 5 possède seulement 2 diviseurs : 1 et 5 donc il est premier.
Le nombre 6 possède 4 diviseurs : 1, 2, 3 et 6 donc il n'est pas premier.

A connaître : la liste des 10 plus petits nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Remarque : Il existe une infinité de nombres premiers.

III) Décomposition en produit de facteurs premiers

Définition : **Décomposer** un nombre en **produit de facteurs premiers** c'est écrire ce nombre comme le **résultat d'une multiplication** dont les facteurs sont tous des **nombres premiers**.

Produit

Exemples : $15 = 3 \times 5$

Nombres premiers

Pas premier ! → $4 = 2 \times 2$

$12 = 4 \times 3 = \underbrace{2 \times 2} \times 3$ Nombres premiers

On redécompose 4 car il n'est pas premier

Il faudra donc connaître les plus petits nombres premiers afin de gagner du temps pour des décomposition plus importantes :

$300 = 2 \times 150 = 2 \times \underbrace{2 \times 75} = 2 \times 2 \times \underbrace{3 \times 25} = 2 \times 2 \times 3 \times \underbrace{5 \times 5}$ Nombres premiers

IV) Application : fractions irréductibles

Définition : On dit qu'une fraction est **irréductible** lorsqu'**on ne peut plus la simplifier**.

On peut se servir de la décomposition en facteurs premiers pour rendre une fraction irréductible.

Exemple : $\frac{42}{56} = \frac{2\times3\times7}{2\times2\times2\times7} = \frac{\cancel{2}\times3\times\cancel{7}}{\cancel{2}\times2\times2\times\cancel{7}} = \frac{3}{4}$