Fonction linéaire

Rappel : Une **fonction** est une "machine" qui **transforme un nombre d'entrée en un nombre de sortie**.

un antécédent $\longrightarrow$ **son image**

I) Définition

Premiers exemples : Prenons la fonction définie par $f : x \longmapsto 5 \times x$

Cette fonction multiplie le nombre d'entrée par 5.

Prenons maintenant, la fonction définie par $g : x \longmapsto -3{,}1 \times x$

Cette fonction multiplie le nombre d'entrée par -3,1.

Encore une fois, prenons la fonction définie par $h : x \longmapsto \frac{2}{3} \times x$

Cette fonction multiplie le nombre d'entrée par $\frac{2}{3}$.

Ces 3 fonctions sont "fabriquées" de la même manière : elles multiplient toutes le nombre d'entrée par un nombre fixé au départ (que l'on va appeler coefficient).
On appelle ce genre de fonctions des **fonctions linéaires**.

Définition : Une **fonction linéaire** est une fonction **qui multiplie** le nombre d'entrée par un coefficient "**a**" fixé au départ. On peut la noter :

$\boldsymbol{f : x \longmapsto a \times x}$ *représentation algébrique*

Le nombre **a** s'appelle le **coefficient directeur** de la fonction linéaire.

Exemples :

$f : x \longmapsto 2{,}4 \times x$ est une fonction linéaire de coefficient 2,4.

$g : x \longmapsto -7{,}1x$ est une fonction linéaire de coefficient -7,1.

Par contre, $h : x \longmapsto 9 + x$ ou $j : x \longmapsto x - 4$

ne sont pas des fonctions linéaires ! (ce n'est pas une multiplication)

$k : x \longmapsto 6x + 5$ **n'est pas non plus** une fonction linéaire (il n'y a pas UNIQUEMENT une multiplication)

II) Situation de proportionnalité

Propriété : Une **situation de proportionnalité** peut être traduite sous la forme d'une **fonction linéaire.**
Et réciproquement : une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité.

Exemple : Je fais le plein de ma voiture. Le diesel coûte 1,35 € /L. Voici un tableau représentant le prix à payer en fonction du nombre de litres que je mets dans le réservoir de ma voiture :

Nombre de litres	1	2	5	10	x
Prix (€)	1,35	2,70	6,75	13,50	$1,35\times x$

$\times 1,35$

On a bien ici une **situation de proportionnalité** dont le **coefficient est 1,35**.

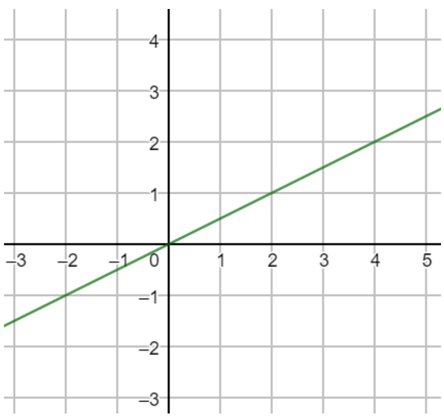
Si on désigne par x le nombre de litres que je mets dans le réservoir, et f la fonction qui me permet de calculer le prix, on obtient : $f : x \longmapsto 1,35\times x$

Cette fonction est bien une **fonction linéaire de coefficient 1,35**.

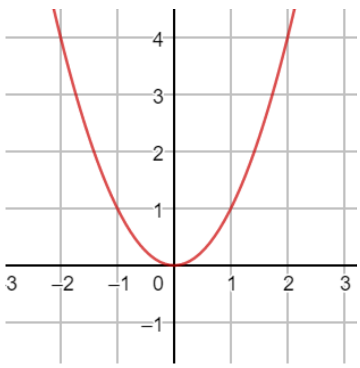
III) Représentation graphique

Propriété : Une **fonction linéaire** est toujours représentée sous la forme d'une **droite passant par l'origine du repère**.
Et réciproquement : lorsque la représentation d'une fonction est une droite passant par l'origine du repère, celle-ci est une fonction linéaire.

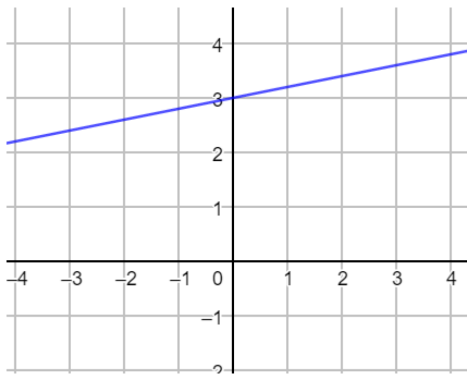
Exemples :



Ceci est la représentation d'une **fonction linéaire** car c'est une droite qui passe par l'origine.



Ceci n'est pas la représentation d'une fonction linéaire car ce n'est pas une droite.



Ceci n'est pas la représention d'une fonction linéaire car la droite ne passe pas par l'origine.

IV) Exemples d'études de fonctions linéaires

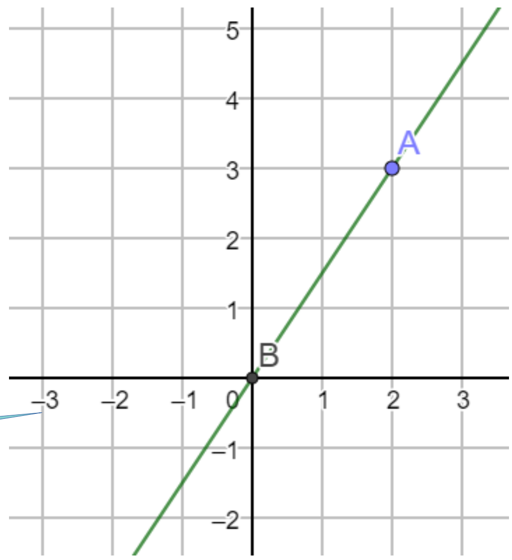
Exemple 1 : On donne la fonction définie par $f : x \longmapsto 1,5x$

Tracer la représentation graphique de cette fonction.

<u>Réponse</u> : On reconnait une fonction de la forme *f :* ∞ ⟶ a × ∞ avec a =1,5

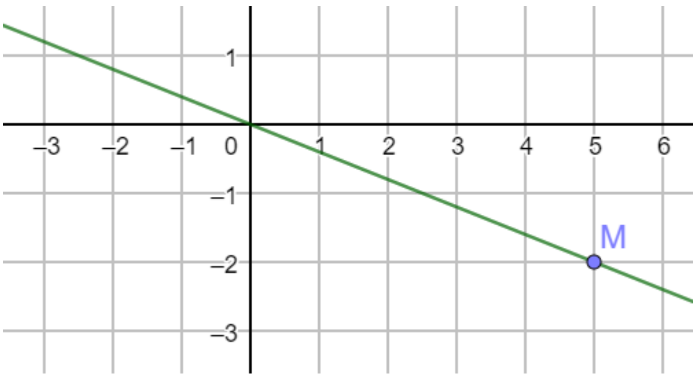
Donc *f* est une fonction linéaire. Elle sera donc **représentée par une droite passant par l'origine du repère**. Il nous faut 2 points pour la tracer : on a déjà l'origine.

De plus, en prenant x = 2 (ou n'importe quel autre nombre), on a : f(2) = 1,5 × 2 = 3.
Donc le point A de coordonnées A(2 ; 3) est sur la courbe représentative de cette fonction.



On place le point A
puis on trace la droite
qui passe par A et l'origine.

<u>Exemple 2 (difficile)</u> : On donne la fonction représentée ci-contre passant par le point M(5 ; -2).
Donner la représentation algébrique de cette fonction.



<u>Réponse</u> : Cette fonction est représentée par une droite passant par l'origine du repère. Donc il s'agit d'une fonction linéaire. Sa représentation algébrique est donc de la forme :

g : ∞ ⟶ a × ∞ Il reste donc à calculer combien vaut le coefficient directeur a.

On sait, de plus, que la fonction passe par le point M(5 ; -2) donc en remplaçant ∞ par 5, on a : *g*(5) = a × 5 = -2 (car l'image de 5 vaut -2)

On résout l'équation a × 5 = -2 soit $\frac{5\times a}{5}=\frac{-2}{5}$ donc a = -0,4.

On trouve donc la représentation algébrique suivante : *g :* ∞ ⟶ *-0,4* × ∞

Fonction affine

I) Définition

Définition : Une **fonction affine** est une fonction **qui multiplie** le nombre d'entrée par un coefficient "**a**" fixé au départ, **puis ajoute** un autre nombre "**b**" fixé lui aussi au départ. On peut la noter :

$f : x \longmapsto a \times x + b$ *représentation algébrique*

Le nombre **a** s'appelle le **coefficient directeur** de la fonction affine.
Le nombre **b** s'appelle l'**ordonnée à l'origine**.

Exemples :

$f : x \longmapsto -7 \times x + 9$ est une fonction affine de coefficient directeur $a = -7$ et d'ordonnée à l'origine $b = 9$.

$g : x \longmapsto 5x - 6$ est une fonction affine de coefficient directeur $a = 5$ et d'ordonnée à l'origine $b = -6$. (car on peut l'écrire $5x + (-6)$)

Par contre, $h : x \longmapsto 3x^2 + 5$ **n'est pas** une fonction affine à cause du carré.

Remarques :
les nombres **a** et **b** peuvent très bien être égal à zéro !

- Si **b = 0**, alors la fonction affine est particulière $f : x \longmapsto a \times x$, c'est une **fonction linéaire** ! Ainsi toutes les fonctions linéaires sont des fonctions affines particulières.
- Si **a = 0**, alors la fonction affine est particulière $f : x \longmapsto b$

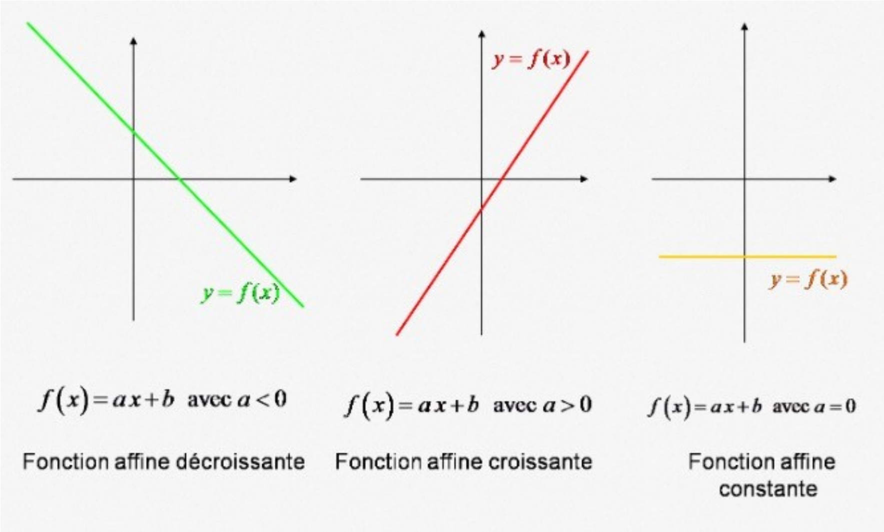
  Ici, l'image vaut tout le temps b, quelque soit l'antécédent. On dit que la **fonction est constante**.

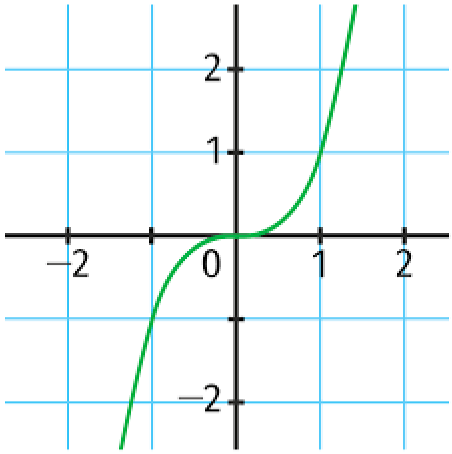
II) Représentation graphique

Propriété 1 : Une **fonction affine** est représentée sous la forme d'une **droite** passant ou non par l'origine du repère.
Et réciproquement : lorsque la représentation d'une fonction est une droite, celle-ci est une fonction affine.

Propriété 2 : Dans **fonction affine** le nombre **a**, est appelé **coefficient directeur**.
Lorsque **a est positif**, la droite "monte", on dit que la **fonction est croissante**.
Lorsque **a est négatif**, la droite descend, on dit que la **fonction est décroissante**.
Lorsque **a = 0**, alors la droite est horizontale, on dit que la **fonction est constante**.

Exemples :



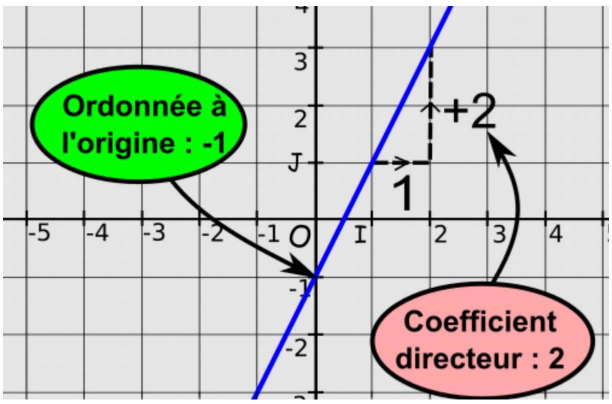


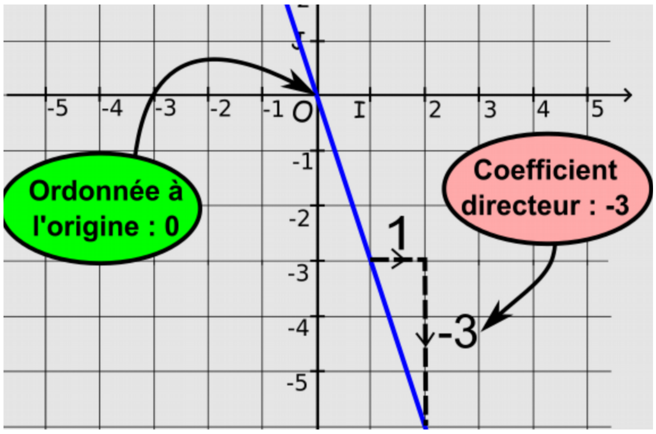
Ceci n'est pas une fonction affine car ce n'est pas une droite.

Propriété 3 : Le nombre **b**, l'**ordonnée à l'origine**, peut se lire directement sur la courbe représentative d'une fonction : cela correspond au **point où la courbe coupe l'axe des ordonnées**.

Propriété 4 : Le nombre **a**, le **coefficient directeur**, peut se lire directement sur la courbe représentative d'une fonction : cela correspond à **combien on a monté ou descendu sur l'axe des ordonnées lorsqu'on a avancé de 1 sur l'axe des abscisses**.

Exemples :





Ici **b = -1** et **a = 2**
Donc

$f : x \longrightarrow 2 \times x - 1$

Ici **b = 0 (fonction linéaire)** et **a = -3**
Donc

$g : x \longrightarrow -3 \times x$

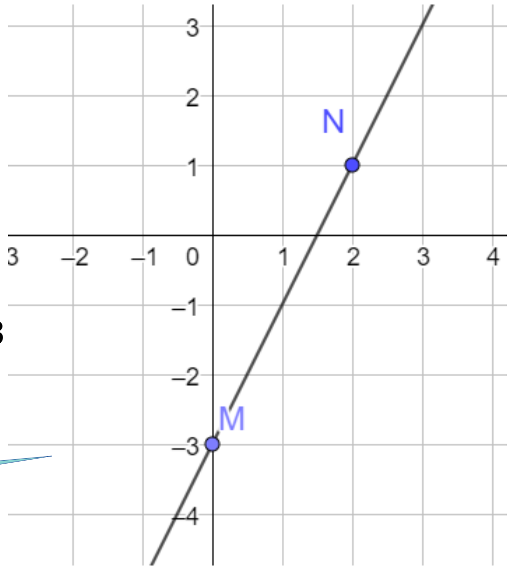
III) Exemples d'études de fonctions linéaires

Exemple 1 : On donne la fonction définie par $f : x \longrightarrow 2x - 3$

Tracer la représentation graphique de cette fonction.

Propriété 1 : Pour calculer le nombre **b**, l'**ordonnée à l'origine**, on calcule l'image de zéro : ***f*(0) = b**
Cela correspond au **point où la courbe coupe l'axe des ordonnées**.

Réponse : On reconnait une fonction de la forme $f : x \longrightarrow a \times x + b$ avec a = 2 et b = -3. Donc *f* est une fonction affine. Elle sera donc **représentée par une droite.** Il nous faut 2 points pour la tracer.

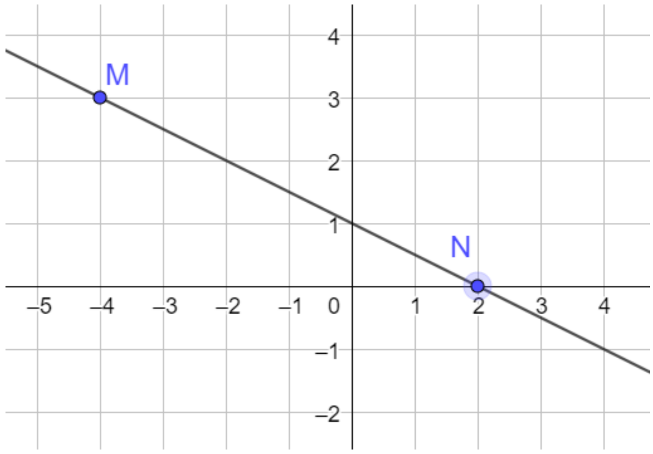


En prennant x =0, on a : *f*(0) = -3 Donc le point M de coordonnées M(0 ; -3) est sur la courbe représentative de cette fonction.
La courbe coupera l'axe des ordonnées sur ce point.

De même, en prennant x = 2, on a : f(2) = 2 × 2 – 3 = 1. Donc le point N de coordonnées N(2 ; 1) est sur la courbe représentative de cette fonction.

On place les points M et N
puis on trace la droite
qui passe par ces 2 points.

Exemple 2 (difficile) : On donne la fonction représentée ci-contre passant par les points M(-4 ; 3) et N(2 ; 0).
Donner la représentation algébrique de cette fonction.



Propriété 2 : Pour calculer le nombre **a**, le **coefficient directeur**, on utilise la formule : $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ où x_1 et x_2 sont 2 antécédents différents.

et $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont leurs images.

Réponse : Cette fonction est représentée par une droite, donc c'est une fonction affine.
Sa représentation algébrique est donc de la forme :

$g : x \longrightarrow a \times x + b$

Il reste donc à calculer combien vaut le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b.
Calcul de a : la fonc tion passe par M(-4 ; 3) donc *f*(-4) = 3
Elle passe aussi par N(2 ; 0) donc *f*(2) = 0
On utilise la formule : $\boldsymbol{a=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(-4)-f(2)}{-4-2}=\frac{3-0}{-4-2}=\frac{3}{-6}=-0{,}5}$

Donc l'expression algébrique est *g :* ∞ $\longrightarrow$ -0,5 × ∞ + b Il reste à trouver b.

Comme la fonction passe par M(-4 ; 3), on a *f*(-4) = 3. Remplaçons ∞ par -4 :

f(-4) = -0,5 × (-4) + b = -2 + b mais comme *f*(-4) = 3, on a :
-2 + b = 3. Donc on résout cette petite équation et on trouve b = 3 + 2 = 5.
Donc finallement l'expression algébrique complète est :

g : ∞ $\longrightarrow$ -0,5 × ∞ + 5