Calcul Littéral : Factorisation

I) Vocabulaire

Vocabulaire : Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme de plusieurs termes en un produit en réintroduisant des parenthèses.
C'est le contraire de développer.

Nous allons donc reprendre chaque méthode de développement pour l'utiliser « à l'envers » et ainsi retrouver des parenthèses afin d'avoir un produit.

II) Utiliser un facteur commun pour factoriser

C'est le contraire de la distributivité.

Propriété : Pour n'importe quels nombres k, a et b, on a :

Facteur commun k :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

mise en commun

Exemples : $A = 5 \times 2x + 5 \times 3$ Ici $k = 5$

$A = 5 \times (2x + 3)$

$B = 7 \times x - 4 \times x$ Ici $k = x$

$B = x \times (7 - 4) = x \times 3 = 3x$

Le facteur commun ne se retrouve écrit plus qu'une seule fois devant les parenthèses.
Attention, parfois, le facteur commun n'est pas « directement visible » :

$C = 12x^2 + 20x$ On décompose chaque terme en produit

$C = \underbrace{4x \times 3x} + \underbrace{4x \times 5}$ Ici $k = 4x$

$C = 4x \times (3x + 5)$

Niveau au dessus ! Parfois, le facteur commun peut être, non pas un nombre ou une lettre, mais une expression complète :

$D = (5x - 7) \times 8x + (5x - 7) \times 9$ Ici $k = (5x - 7)$

$D = (5x - 7) \times (8x + 9)$

III) Utiliser une identité remarquable pour factoriser

Nous avons vu que dans certains cas particuliers, la double distributivité revient à utiliser des formules, appelées identités remarquables qui simplifient les calculs.
Nous pouvons utiliser ces mêmes identités remarquables dans le sens contraire afin de factoriser une expression littérale.

Propriété : Pour n'importe quels nombres a et b, on a :

$$a^2 + 2\times a\times b + b^2 = (a+b)^2$$

Première identité remarquable

Exemple :

Carrés

$A = \underbrace{25x^2}_{\text{Carrés}} + 40x + 16$ On remarque les 2 carrés $25x^2$ et 16

$A = \underbrace{(5x)^2}_{a^2} \underbrace{+}_{+} \underbrace{2\times(5x\times 4)}_{2\times a\times b} \underbrace{+}_{+} \underbrace{(4)^2}_{b^2}$ On a donc $a = 5x$ et $b = 4$

On vérifie que $2\times(5x\times 4)$ donne bien $40x$

$A = \underbrace{(5x + 4)^2}_{(a+b)^2}$ On utilise la partie de droite de la formule

Propriété : Pour n'importe quels nombres a et b, on a :

$$a^2 - 2\times a\times b + b^2 = (a-b)^2$$

Deuxième identité remarquable

Exemple :

$B = 49x^2 - 42x + 9$ On remarque les 2 carrés $49x^2$ et 9

$B = \underbrace{(7x)^2}_{a^2} \underbrace{-}_{-} \underbrace{2\times(7x\times 3)}_{2\times a\times b} \underbrace{+}_{+} \underbrace{(3)^2}_{b^2}$ On a donc $a = 7x$ et $b = 3$

On vérifie que $2\times(7x\times 3)$ donne bien $42x$

$B = \underbrace{(7x - 3)^2}_{(a-b)^2}$ On fait attention aux signes et on utilise la partie de droite de la formule

Propriété : Pour n'importe quels nombres a et b, on a :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Troisième identité remarquable

Exemples :

$C = 36x^2 - 25$ On remarque les 2 carrés $36x^2$ et 25

$C = \underbrace{(6x)^2}_{a^2} \underbrace{-}_{-} \underbrace{(5)^2}_{b^2}$ On a donc $a = 6x$ et $b = 5$. Il faut absolument un signe « − »

$C = \underbrace{(6x - 5)}_{(a - b)}\underbrace{(6x + 5)}_{(a + b)}$ On utilise la partie de droite de la formule.

Niveau au dessus (difficile) ! Parfois le a et le b de la formule peuvent être des bouts d'expressions littérales :

$D = \underbrace{(x + 8)^2}_{a^2} \underbrace{-}_{-} \underbrace{(x - 2)^2}_{b^2}$ On remarque les 2 carrés $(x + 8)^2$ et $(x - 2)^2$

$D = \underbrace{\big((x + 8) - (x - 2)\big)}_{(a - b)} \times \underbrace{\big((x + 8) + (x - 2)\big)}_{(a + b)}$ On utilise la partie de droite de la formule avec $a = (x + 8)$ et $b = (x - 2)$.

Puis dans chaque grande parenthèse, on enlève les petites parenthèses en prenant en compte le signe qui la précède (surtout celle précédée d'un signe « - ») :

$D = \big((x + 8) - (x - 2)\big) \times \big((x + 8) + (x - 2)\big)$

$D = \underbrace{(x + 8 - x + 2)}_{} \times \underbrace{(x + 8 + x - 2)}_{}$ Enfin on réduit dans chaque parenthèse.

$D = 10 \times (2x + 6)$