Calcul Littéral : Réduction et Développement

I) Généralités

- Les **lettres** utilisées dans un calcul (x, y, z…) servent à désigner des **nombres dont on ne connaît pas les valeurs**.
- Le nombre x peut aussi être considéré comme $1x$ ou encore $1 \times x$
- On peut supprimer le signe "×" entre 2 lettres ou entre un nombre et une lettre (le nombre se place alors devant la lettre) : $3 \times x = 3x$ et $x \times y = xy$
- Lorsque plusieurs lettre identiques sont multipliées, on utilise le symbole des puissances (carré, cube…) : $x \times x = x^2$ et $y \times y \times y = y^3$

II) Réduction d'une expression

Vocabulaire : Réduire une expression littérale, c'est la rendre plus courte en regroupant les termes « semblables ».

Méthode : Pour réduire une expression littérale, on utilise les 2 règles suivantes :
- On peut TOUJOURS réduire une multiplication
- On ne peut additionner ou soustraire que les termes d'une « même famille ».

Pour cela on regroupe les x^2 ensemble, les x ensemble, les nombres sans lettre ensemble… Attention tout de même aux signes « - » qui appartiennent aux nombres qui suivent directement ces signes.

Exemples : $A = 5x^2 + 6x - 7 + 4x^2 - 8x - 4$

$A = \underbrace{5x^2 + 4x^2}_{9x^2} \underbrace{+ 6x - 8x}_{-2x} \underbrace{- 7 - 4}_{-11}$

$A = 9x^2 - 2x - 11$

$B = \underbrace{5x \times 3x}_{15x^2} - \underbrace{6x \times 3}_{18x}$

$B = 15x^2 - 18x$

III) Développement : la distributivité

Développer une expression littéral vient du mot désenvelopper, c'est à dire enlever « l'enveloppe » du calcul (les parenthèses).

Méthode : Pour n'importe quels nombres k, a et b, on a :

Distributivité:

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Par exemple, dans le calcul A = 8×(4 + 3) , il y a 2 manières de trouver le même résultat :

Méthode 1 : en respectant les priorités

A = 8×(4 + 3)
A = 8×   7
A = 56

*Méthode 2 en **distribuant** le 8 à tous les nombres de la parenthèse :*

A = 8×(4 + 3)
A = 8×4 + 8×3
A = 32   + 24
A = 56

Distributivité

Dans un calcul littéral, on ne peut souvent pas effectuer les calculs entre parenthèses car on ne connaît pas la valeur de la lettre. Par contre on peut quand même utiliser la distributivité pour transformer notre expression littérale :

$B = 6x \times (2x - 5)$

$B = 6x \times 2x - 6x \times 5$

$B = 12x^2 - 30x$

En faisant ainsi, on a changé l’ordre des calculs à effectuer. On se retrouve au final avec une somme (ou une différence) de plusieurs termes.

<u>Vocabulaire</u> : **Développer une expression littérale**, c’est transformer cette expression pour avoir une somme de plusieurs termes.

IV) Développement : la double distributivité

<u>Méthode</u> :

Pour n’importe quels nombres a, b, c et d, on a :

Double distributivité:

$$(a+b)(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

- Attention à la règle de signes de la multiplication
- $3x \times 5x = 15x^2$

Exemple : $A = (2x + 3)\times(7x - 5)$

Attention aux signes !

$A = 2x\times 7x + 2x\times(-5) + 3\times 7x + 3\times(-5)$

1 flèche → 1 multiplication

$A = 14x^2 \underbrace{+ (-10x) + 21x}$ $+ (-15)$

Entre chaque flèche → 1 addition

$A = 14x^2 + 11x + (-15)$

V) Supprimer des parenthèses précédées d'un signe « + » ou « - »

Lorsqu'il n'y a pas de multiplication avant ou après des parenthèses, on ne peut pas utiliser la distributivité (ni simple, ni double). On regarde dans ce cas si elles sont précédées d'une addition ou d'une soustraction.

Méthode : On peut enlever directement des parenthèses précédées d'un signe « + »

Exemple : $A = 5x + (6x - 3)$ ← On enlève directement ces parenthèses précédées

$A = 5x + 6x - 3$ du signe « + » .

$A = 11x - 3$ Puis on réduit.

Méthode : On peut enlever des parenthèses précédées d'un signe « - » à condition de **changer les signes de tous les termes dans ces parenthèses**.

Exemple : $B = 2x - (4x - 7)$ ← On enlève ces parenthèses précédées du signe « - »

$B = 2x - 4x + 7$ en changeant $4x$ en $-4x$ et -7 en $+7$

$B = -2x + 7$ Puis on réduit. (C'est comme si on avait distribué -1)

VI) Double distributivité : Cas particuliers des identités remarquables

Lorsqu'on est dans certains cas de double distributivité (où les nombres dans les parenthèses sont les mêmes ou presque), les calculs peuvent se simplifier. On pourra toujours utiliser la double distributivité ou alors apprendre des formules appelées identités remarquables qui permettent de faire les calculs plus simplement.

Premier exemple :

$A = (3x + 5)\times(3x + 5)$ On peut aussi écrire ce calcul : $A = (3x + 5)^2$

$A = 3x\times3x + 3x\times5 + 5\times3x + 5\times5$ On doit calculer le carré de $3x$ et celui de 5

Carré ... Carré

$A = (3x)^2 + 2\times(3x\times5) + (5)^2$ ainsi que 2 fois le même calcul $3x\times5$

$A = 9x^2 + 30x + 25$ On réduit.

Propriété : On peut retenir que pour n'importe quels nombres a et b, on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\times a\times b + b^2$$

Première identité remarquable

Deuxième exemple :

$B = (3x - 5)\times(3x - 5)$

On peut aussi écrire ce calcul : $B = (3x - 5)^2$

$B = 3x\times 3x + 3x\times(-5) + (-5)\times 3x + (-5)\times(-5)$

Carré Carré

$B = (3x)^2 + 2\times(3x\times(-5)) + (-5)^2$

$B = 9x^2 - 30x + 25$

On doit calculer le carré de $3x$ et celui de -5 ainsi que 2 fois le même calcul $3x\times(-5)$. Puis on réduit.

Propriété : On peut retenir que pour n'importe quels nombres a et b, on a :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\times a\times b + b^2$$

Deuxième identité remarquable

Troisième exemple :

$C = (3x - 5)\times(3x + 5)$

On peut aussi écrire ce calcul : $C = (3x + 5)\times(3x - 5)$

$C = 3x\times 3x + \underbrace{3x\times 5 + (-5)\times 3x}_{\text{s'annulent}} + (-5)\times 5$

Carré Carré

$C = (3x)^2 - (5)^2$

$C = 9x^2 - 25$

Cette fois, $3x\times 5$ et $(-5)\times 3x$ s'annulent ! Attention aussi au signe devant le carré de 5 !. Puis on réduit.

Propriété : On peut retenir que pour n'importe quels nombres a et b, on a :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Troisième identité remarquable

Quelques exemples d'utilisation :

$D = (7x + 6)^2$

$D = (7x)^2 + 2\times(7x\times 6) + (6)^2$

$D = 49x^2 + 84x + 36$

$E = (x - 9)^2$

$E = (x)^2 - 2\times(x\times 9) + (9)^2$

$D = x^2 - 18x + 81$

$F = (4x - 1)(4x + 1)$

$F = (4x)^2 - (1)^2$

$F = 16x^2 - 1$