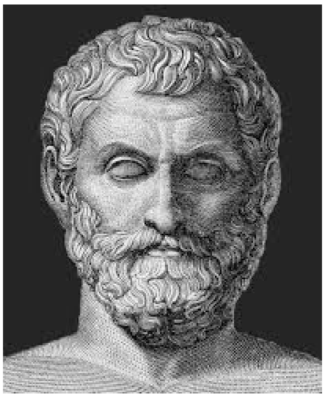
Théorème de Thalès

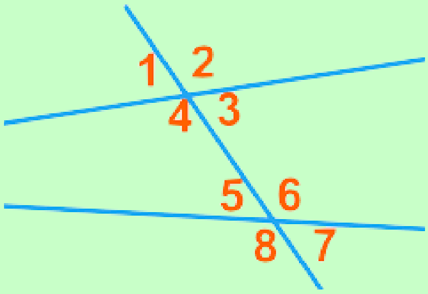
I) Qui était Thalès ?



Thalès serait né autour de 625 avant J.C. à Milet en Asie Mineure (actuelle Turquie). Considéré comme l'un des **sept sages de l'Antiquité**, il est à la fois **mathématicien, ingénieur, philosophe et homme d'Etat** mais son domaine de prédilection est l'astronomie. Thalès ne s'est pas beaucoup occupé des nombres, il s'est surtout **intéressé aux figures géométriques, cercles, droites, triangles**. Lors de son premier voyage en Egypte, Thalès applique le théorème qui porte aujourd'hui son nom pour **mesurer la hauteur de la grande pyramide de Kheops**.
C'est à ce théorème que nous allons nous intéresser dans cette leçon

II) Rappel : Angles formés par 2 droites et une sécante

Définition : Lorsque l'on trace **2 droites, coupées toutes les 2 par une 3^e droite** (sécante), on forme alors **2 groupes de 4 angles**. On peut alors les associer 2 par 2 en leur donnant un nom approprié parmi (voir figure) :



- **angles correspondants** 1 et 5, ou 2 et 6, ou 4 et 8 ou 3 et 7.
- **angles alternes internes** 4 et 6 ou 3 et 5 (à l'intérieur mais de chaque coté de la sécante).
- **angles alternes externes** 1 et 7 ou 2 et 8 (à l'extérieur mais de chaque coté de la sécante).

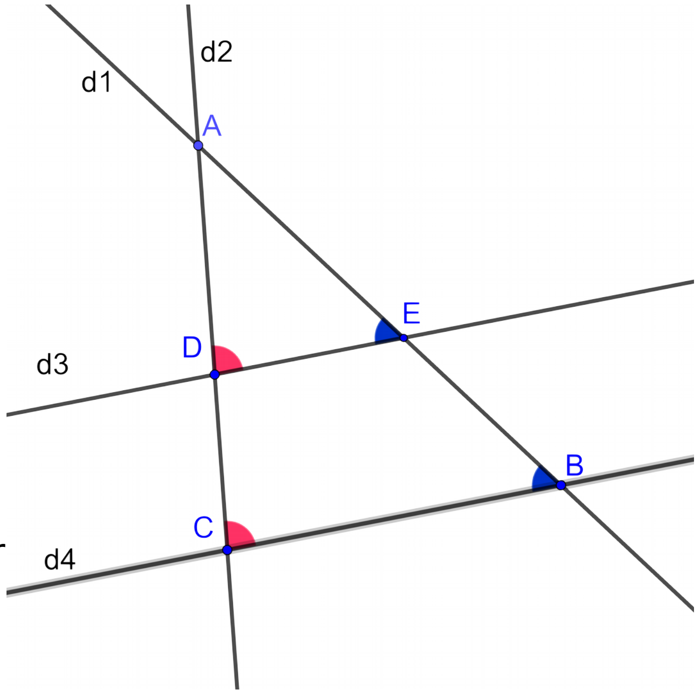
Propriété : Si **2 droites sont parallèles** alors les **angles correspondants** formés avec une sécante **sont égaux**.

Remarque : on a la même propriété avec les angles alternes internes et une autre avec les angles alternes externes.

Propriété réciproque : Si 2 droites et une sécante foment des **angles correspondants égaux** alors **ces 2 droites sont parallèles**.

Remarque : on a la même propriété réciproque avec les angles alternes internes et une autre avec les angles alternes externes.

III) Propriété de thalès



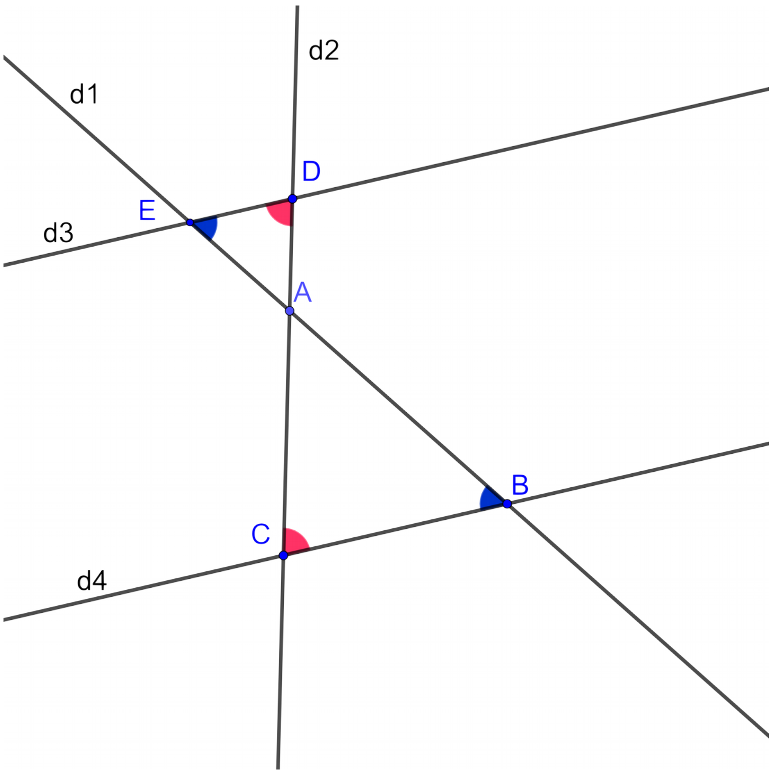
Lorsque l'on trace :
- 2 droite (d1) et (d2) secantes en A
- et 2 droites parallèles (d3) et (d4) coupant (d1) et (d2),

on obtient une figure qui ressemble à celle-ci :
On a alors formé **2 paires d'angles correspondants égaux** (car les droites (d3) et (d4) sont parallèles)

$\widehat{ADE}=\widehat{ACB}$ et $\widehat{AED}=\widehat{ABC}$

Donc les 2 triangles ADE et ACB ont 2 paires d'angles égaux ainsi que leur 3e angle qui est le même.
ADE et ACB sont donc des triangles semblables !
Or nous avons vu que lorsque 3 triangles sont semblables, leurs côtés sont proportionnels.
Nous pouvons résumé ceci dans le théorème suivant :

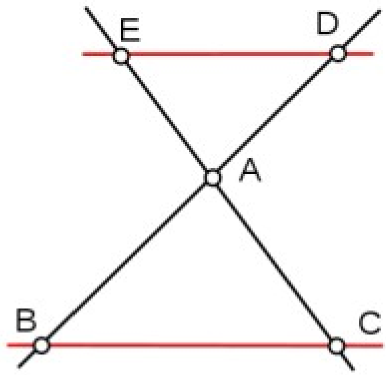
Théorème de Thalès : Si **2 droites sécantes** sont coupées par **2 droites parallèles**, alors **les cotés des 2 triangles** ainsi formés **sont proportionnels.**



Remarque : en plaçant les 2 droites parallèles, nous aurions pu également avoir une figure ressemblant à cela :
Tout ce que nous avons dit auparavant reste vrai mis à part le fait que les paires d'angles égaux sont des angles alternes internes (et non correspondants).
Nous avons donc
2 configurations différentes pour ce théorème :
la première s'appelle la **configuration des triangles emboités** et la deuxième, la **configuration "papillon".**

IV) Exemple d'utilisation

Sur cette figure, les droites (ED) et (BC) sont parallèles. On donne AE = 4cm, AC = 15cm et BC = 12cm. Combien mesure ED ?



<u>Solution rédigée</u> :
On sait que :
- (EC) et (BD) sont 2 droites sécantes en A
- (ED) et (BC) sont parallèles.

Donc, **d'après le théorème de Thalès**, les côtés des triangles AED et ABC sont proportionnels :

Triangle AED	AE = 4 cm	AD	ED = ?
Triangle ABC	AC = 15 cm	AB	BC = 12cm

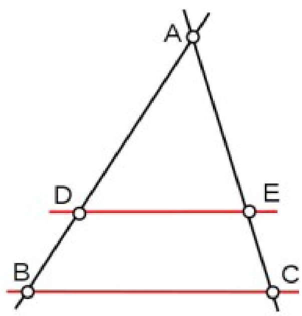
On effectue un produit en croix : $ED=\frac{BC\times AE}{AC}=\frac{12\times 4}{15}=\frac{48}{15}=3{,}2\,cm$

V) Réciproque du théorème de Thalès

Le théorème de Thalès possède une réciproque qui est vraie :

Théorème de Thalès : Si **2 droites sécantes** (d1) et (d2) sont coupées par **2 autres droites (d3) et (d4)** formant ainsi **2 triangles** dont **les côtés sont proportionnels**, alors les **droites (d3) et (d4) sont parallèles**.

Remarque : cette propriété ne sert pas à calculer une longueur mais à prouver que 2 doites sont parallèles.



Exemple d'utilisation :
Sur la figure ci-contre, on donne : AD = 3cm, AB = 12cm, AE = 4cm, AC = 16cm, DE = 2,5cm et BC = 10cm. Montrer que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

<u>Solution rédigée</u> :

Triangle AED	AD = 3 cm	AE = 4 cm	ED = 2,5 cm
Triangle ABC	AB = 12 cm	AC = 16 cm	BC = 10 cm

x4

Ici, on a $AB\div AD=12\div 3=4$ et $AC\div AE=16\div 4=4$ et $BC\div ED=10\div 2{,}5=4$ Donc ce tableau représente une situation de proportionnalité.

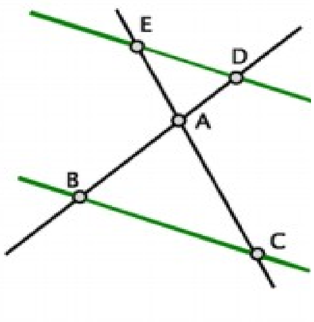
On sait donc que :
- les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A
- et qu'elles forment avec les droites (DE) et (BC) 2 triangles ADE et ABC qui ont leurs côtés proportionnels.
Donc **d'après la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

VI) Conséquence du théorème de Thalès

Le théorème de Thalès possède une conséquence qui ressemble à la réciproque :

Théorème de Thalès : Si **2 droites sécantes** (d1) et (d2) sont coupées par **2 autres droites (d3) et (d4)** formant ainsi **2 triangles** dont **les côtés ne sont pas proportionnels**, alors les **droites (d3) et (d4) ne sont pas parallèles**.

Remarque : cette propriété ne sert pas à calculer une longueur mais à prouver que 2 doites ne sont pas parallèles.



Exemple d'utilisation :
Sur la figure ci-contre, on donne : EA = 5cm, AC = 15cm, AD = 6cm et AB = 21cm. Montrer que les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.

Solution rédigée :

Triangle AED	AE = 5 cm	AD = 6 cm	ED
Triangle ABC	AC = 15 cm	AB = 21 cm	BC

Ici, on a $AC \div AE = 15 \div 5 = 3$ et $AB \div AD = 21 \div 6 = 3{,}5$. Donc ce tableau ne représente pas une situation de proportionnalité.
On sait donc que :
- les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A
- et qu'elles forment avec les droites (DE) et (BC) 2 triangles ADE et ABC dont les côtés ne sont pas proportionnels.
Donc **d'après la conséquence du théorème de Thalès**, les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.