Trigonométrie

Le mot trigonométrie vient du grec *tri* qui signifie trois, *gonas* angle et *metron* mesure. La trigonométrie s'intéresse donc aux mesures dans des figures fermées à trois angles (des triangles).

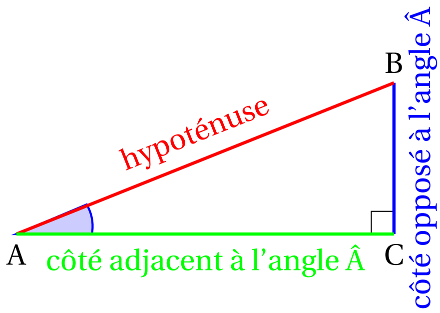
En troisième, nous ferons de la trigonométrie **uniquement dans des triangles rectangles** !

1 Définitions

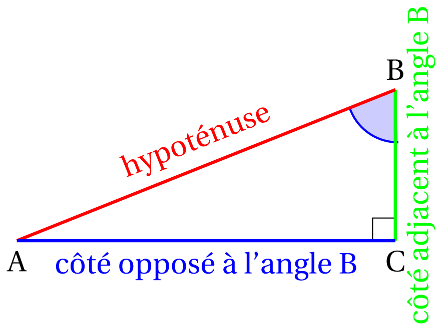
1.1 Côtés d'un triangle rectangle

Un triangle rectangle possède un angle droit en 2 angles aigus. On connait déjà le nom du côté opposé (en face) à l'angle droit : c'est **l'hypoténuse**.

En choisissant ensuite un des 2 angles aigus, on peut appeler les 2 autres côtés : le **côté opposé à cet angle** (en face) et le **côté adjacent à cet angle** (qui touche l'angle mais n'est pas l'hypoténuse).



On a choisi l'angle aigu Â



On a choisi l'angle aigu B

1.2 Relations entre côtés et angles

En 4$^{\text{ème}}$ vous avez vu le **Théorème de Pythagore** qui permet dans un triangle rectangle de **relier** par une égalité **la longueur des 3 côtés**.

Vous avez vu également le **cosinus d'un angle** qui permet de **relier** par une égalité **la mesure d'un angle et les longueurs de 2 côtés** (l'hypoténuse et le côté adjacent).

Le sinus et la tangente d'un angle permettent aussi de **relier** par une égalité **la mesure d'un angle et les longueurs de 2 autres côtés** et se définissent de manière similaire :

Sinus, cosinus et tangente d'un angle aigu

Dans un **triangle rectangle**, pour un **angle Â aigu**, on a :

$$\textbf{sin}(\hat{A}) = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{hypoténuse}} \qquad \textbf{cos}(\hat{A}) = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\textbf{tan}(\hat{A}) = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}}$$

Pour retenir ces 3 formules plus facilement, on peut s'aider d'un moyen mnémotechnique. Par exemple en mémorisant les lettres suivantes : **SOH / CAH / TOA**.
SOH reprend les première lettres de **Sinus** égale côté **Opposé** sur **Hypoténuse**.
CAH reprend les première lettres de **Cosinus** égale côté **Adjacent** sur **Hypoténuse**.
TOA reprend les première lettres de **Tangente** égale côté **Opposé** sur côté **Adjacent**.

2 Utilisation des formules trigonométriques pour calculer la longueur d'un côté

2.1 Utilisation de la calculatrice

Avant de faire n'importe quel calcul à la machine, il faut vérifier que celle-ci est bien en **mode degré**. Pour le vérifier il y a souvent dans un coin de l'écran le symbole ***D*** ou ***DEG*** (cela dépend des calculatrices).

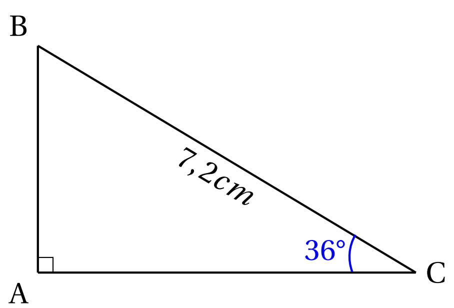
- Si on veut savoir combien fait le sinus d'un angle de 73°, on tape sur sa machine : $\boxed{sin(}$ 73 $\boxed{)}$ $\boxed{EXE}$
  La caculatrice affiche 0.956304756 qui est une **valeur approchée** ! On écrira donc sur notre cahier : $sin(73) \approx 0.9563$
- Si on veut savoir combien fait la tangente d'un angle de 25°, on tape sur sa machine : $\boxed{tan(}$ 25 $\boxed{)}$ $\boxed{EXE}$
  La caculatrice affiche 0.466307658 qui est une **valeur approchée** ! On écrira donc sur notre cahier : $tan(25) \approx 0.4663$

Remarques :

- Le sinus, le cosinus, ou la tangente d'un angle n'ont pas d'unité (seul l'angle est en degré mais pas son sinus par exemple).
- Le **sinus ou le cosinus** d'un angle aigu est toujours une **valeur comprise entre 0 et 1**. Ce n'est pas le cas de la tangente par contre.

2.2 Exemples de calculs de longueurs

Exemple 1 :



Enoncé : Calculer une valeur approchée au dixième de AB.

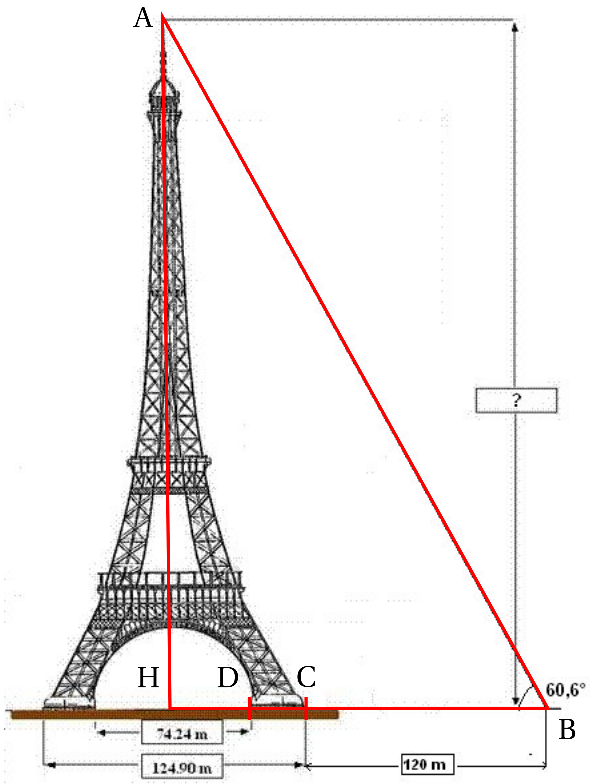
Résolution : On sait que le triangle ABC est rectangle en A.
On peut donc utiliser la trigonométrie.
Note : Ici, en utilisant l'angle $\widehat{BAC}$, on connait l'hypoténuse BC et on cherche le coté opposé AB. Donc d'après nos formules, on utilisera le sinus de l'angle.

$$sin(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} \text{ donc } sin(36) = \frac{AB}{7,2}$$

$$\frac{sin(36)}{1} = \frac{AB}{7,2} \text{ donc } AB = \frac{7,2 \times sin(36)}{1} \approx 4,23$$

AB mesure $4,2cm$ environ (arrondi au dixième).

Exemple 2 :



Enoncé : Un touriste aimerait calculer la hauteur de la Tour Eiffel.
Pour cela, il mesure la distance intérieure entre les pieds : $74,24m$, la distance extérieure entre les pieds : $124,90m$, puis en se plaçant en B, à 120m de l'extérieur du pied, il mesure l'angle du sol avec le sommet A : 60,6°.

Résolution : On considère que le triangle ABH est rectangle en H.
On peut donc utiliser la trigonométrie :

$$tan(\widehat{ABH}) = \frac{AH}{HB}$$

or $HB = BC + HC = 120 + \frac{124.9}{2} = 182,45m$

$$tan(60,6) = \frac{AH}{182,45} \text{ donc } \frac{tan(60,6)}{1} = \frac{AH}{182,45}$$

$$\text{donc } AH = \frac{182,45 \times tan(60,6)}{1} \approx 323,8m$$

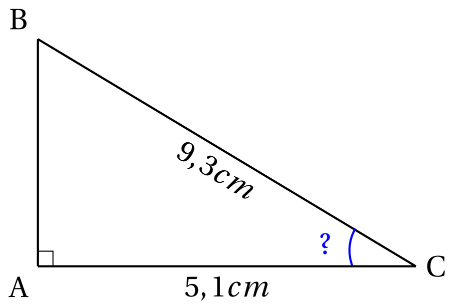
La Tour Eiffel mesure environ $323,8m$.

3 Utilisation des formules trigonométriques pour calculer la mesure d'un angle

3.1 Utilisation de la calculatrice

- Si on veut savoir combien fait la mesure d'angle dont le cosinus fait environ 0,5847, on tape sur sa machine : $\boxed{2nd}\ \overset{cos^{-1}}{\boxed{cos(}}\ O,5847\ \boxed{)}\ \boxed{EXE}$
  La caculatrice affiche 54,21820078 qui est une **valeur approchée** ! On écrira donc sur notre cahier : $cos^{-1}(0,5847) \approx 54,2°$.
  (sur certaines machines on a les touches *SHIFT* au lieu de *2nd* et *Acos* au lieu de cos^{-1})
- Si on veut savoir combien fait la mesure d'angle dont la tangente fait $\frac{5}{17}$, on tape sur sa machine :
  $\boxed{2nd}\ \overset{tan^{-1}}{\boxed{tan(}}\ 5\ \boxed{/}\ 17\ \boxed{)}\ \boxed{EXE}$
  La caculatrice affiche 16,38954033 qui est une **valeur approchée** ! On écrira donc sur notre cahier : $tan^{-1}\left(\frac{5}{17}\right) \approx 16,4°$

3.2 Exemple de calcul de mesure d'angle



Enoncé : Dans le triangle rectangle ABC, calculer la valeur de l'angle $\widehat{ACB}$ arrondie au degré près.

Résolution : On sait que ABC est rectangle en C.
On peut donc utiliser la trigonométrie :
Note : Ici, en considérant l'angle $\widehat{ACB}$, on connait le côté adjacent et l'hypoténuse, donc en regardant les formules, on utilisera le cosinus.
$cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{AC}{BC}$ donc $cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{5,1}{9,3}$
et donc $\widehat{ACB} = cos^{-1}\left(\dfrac{5,1}{9,3}\right) \approx 56,7°$
Finalement $\widehat{ACB}$ mesure environ 57° (arrondi au degré près).

4 Relations entre sinus, cosinus et tangente

Relation entre sinus et cosinus
Pour n'importe quel angle x, on a :

$$\boldsymbol{cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1}$$

Exemple : On donne $sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Sans calculer l'angle x, calculer la valeur exacte de $cos(x)$.

Réponse : On écrit la relation entre sinus et cosinus : $cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$

Puis on remplace par la valeur donnée : $cos(x)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

Ce qui donne : $cos(x)^2 + \dfrac{3}{4} = 1$ donc $cos(x)^2 = 1 - \dfrac{3}{4}$ puis $cos(x)^2 = \dfrac{1}{4}$

Donc finalement $cos(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4}}$ c'est à dire $cos(x) = \dfrac{1}{2}$

Relation entre sinus, cosinus et tangente
Pour n'importe quel angle aigu x (inférieur à 90° !), on a :

$$\boldsymbol{tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}}$$

Exemple : On donne $sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $cos(x) = \dfrac{1}{2}$. Sans calculer l'angle x, calculer la valeur exacte de $tan(x)$.

Réponse : On écrit la relation entre sinus, cosinus et tangente : $tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$

Puis on remplace par les valeurs données : $tan(x) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

5 Quelques valeurs à connaître

Voici quelques valeurs de sinus, cosinus et tangente qu'il est bon de connaître pour certaines valeurs d'angle :

angles degrés	radians	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

Note : les angles sont donnés en degrés, qui est l'unité utilisée au collège, et aussi en radian, que vous verrez au lycée.