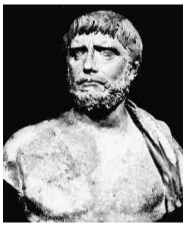
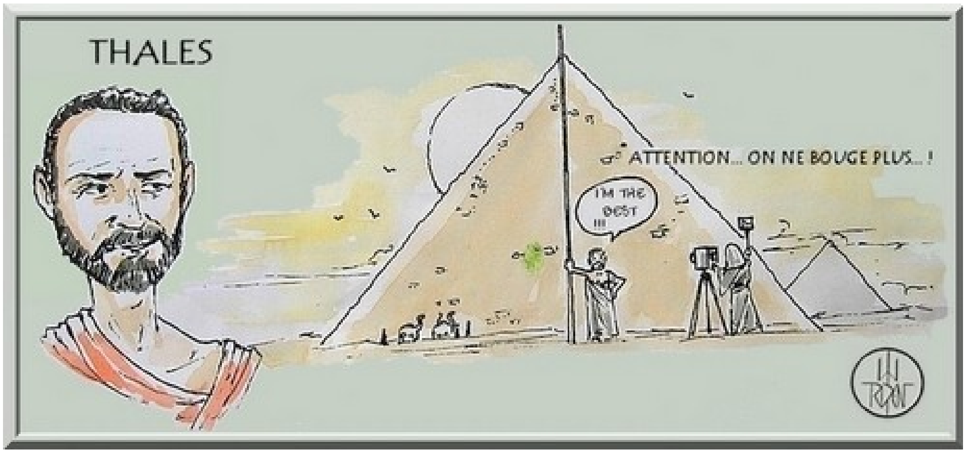
Théorème de Thalès

1 Qui était Thalès ?



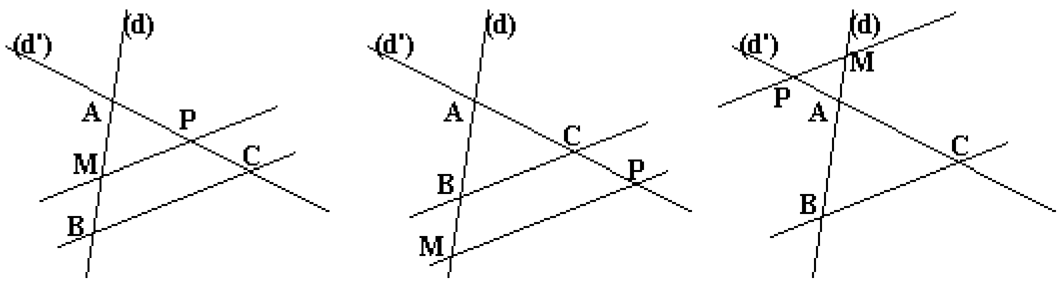
Thalès serait né autour de 625 avant J.C. à Milet en Asie Mineure (actuelle Turquie). Considéré comme **l'un des sept sages de l'Antiquité**, il est à la fois mathématicien, ingénieur, philosophe et homme d'Etat mais son domaine de prédilection est l'astronomie. Thalès ne s'est pas beaucoup occupé des nombres, il s'est surtout intéressé aux figures géométriques, cercles, droites, triangles.
Lors de son premier voyage en Egypte, **Thalès applique le théorème qui porte aujourd'hui son nom pour mesurer la hauteur de la grande pyramide de Kheops**.
C'est à ce théorème que nous allons nous intéresser dans cette leçon.



2 Théorème de Thalès

2.1 Enoncé du théorème de Thalès

En quatrième, vous avez deja étudié le théorème de thalès dans le cas d'un triangle ABC et d'une droite parallèle (MP) au côté (BC) du triangle (sur la figure ci-dessous : cas 1). Il existe également des cas où la droite peut se trouver à l'extérieur du triangle (sur la figure cas 2 et 3).



Cas 1 Cas 2 Cas 3

Afin de rassembler tous les cas de figure nous allons reformuler un peu le théorème :

Théorème de Thalès

Si :
- (MB) et (PC) sont deux droites sécantes en A,
- (MP) et (BC) sont deux droites parallèles,

alors,

on a l'égalité des trois rapports de longueurs suivante : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{MP}{BC}$.

Remarque : La formulation des données peut paraître plus courte que celle énoncée en quatrième. Attention cependant, il y a beaucoup d'informations.
Pour utiliser le théorème de Thalès, il nous faudra donc : **5 points** formés par les intersections de **2 droites sécantes** et **2 droites parallèles**.

Bon c'est bien joli tout ça, mais à quoi ça sert ?

Le théorème de Thalès sert à calculer des longueurs !

2.2 Rappel : produit en croix

Lorsque l'on a une égalité de deux rapports (fractions) dont un des 4nombres est inconnu, on peut utiliser le produit en croix pour trouver ce nombre.

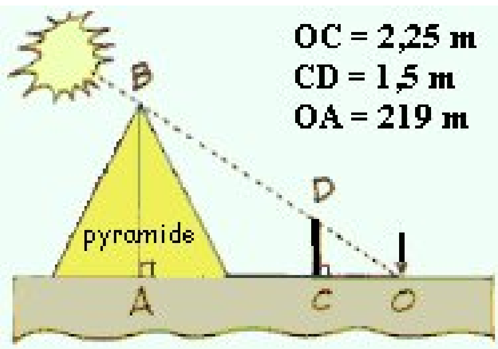
Par exemple : si on a $\dfrac{AB}{12} = \dfrac{5}{3}$, pour trouver la longueur AB, on effectue le calcul $AB = \dfrac{12 \times 5}{3} = \dfrac{60}{3} = 20$.

Autre exemple : si on a $\dfrac{21}{MN} = \dfrac{7}{4}$, pour trouver la longueur MN, on effectue le calcul $MN = \dfrac{21 \times 4}{7} = \dfrac{3 \times 7 \times 4}{7}$
Donc $MN = 12$.

2.3 Utilisation du théorème de Thalès

2.3.1 Exemple 1

Nous allons voir comment utiliser le théorème de Thalès dans la configuration de figure vue en $4^{\text{ième}}$.



La figure ci-contre n'est pas à l'échelle. $[CD]$ représente un baton dont l'ombre $[CO]$ a le même sommet que l'ombre $[AO]$ de la pyramide.
On connait donc la longueur du baton, la longueur de son ombre ainsi que la longueur de l'ombre de la pyramide. Le but est de calculer la hauteur $[AB]$ de la pyramide avec les mêmes outils dont disposait Thalès a son époque : son cerveau !

Solution rédigée : On sait que :
- (AC) et (BD) sont deux droites sécantes en O,
- (AB) et (CD) sont deux droites parallèles (car toutes 2 verticales),

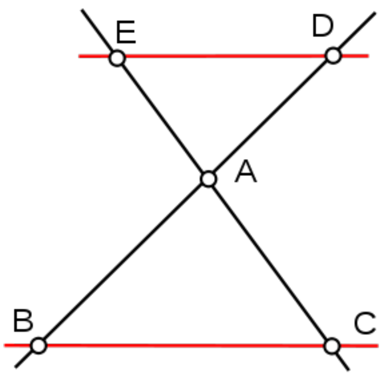
Donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \text{ soit } \frac{2,25}{219} = \frac{OD}{OB} = \frac{1,5}{AB} \text{ et en particulier } \frac{2,25}{219} = \frac{1,5}{AB} \text{ donc } AB = \frac{1,5 \times 219}{2,25} = 146.$$

La pyramide mesure donc 146m de haut.

2.3.2 Exemple 2

Nous allons voir, maintenant, comment utiliser le théorème de Thalès dans la configuration de figure de $3^{\text{ième}}$ dite du papillon.



Sur cette figure, les droites (ED) et (BC) sont parallèles. On donne $AE = 4cm$, $AC = 15cm$ et $BC = 12cm$. Combien mesure ED ?

Solution rédigée : On sait que :

- (BD) et (EC) sont deux droites sécantes en A,
- (ED) et (BC) sont deux droites parallèles,

Donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{ED}{BC}$ soit $\dfrac{4}{15} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{ED}{12}$ et en particulier $\dfrac{4}{15} = \dfrac{ED}{12}$

donc $ED = \dfrac{4 \times 12}{15} = \dfrac{4 \times 4 \times 3}{5 \times 3} = \dfrac{16}{5} = 3,2$.

ED mesure donc $3,2cm$.

3 Conséquence du théorème de Thalès

Si on regarde maintenant un figure similaire aux précédentes mais sans se soucier des données. Si l'égalité des 3 rapports n'est pas vérifiée c'est donc que toutes les données ne sont pas non plus vérifiées : donc en fait qu'il n'y a pas de parallélisme. Cela se traduit par la propriété suivante :

3.1 Enoncé

Conséquence du Théorème de Thalès

Si :

- (MB) et (PC) sont deux droites sécantes en A,
- mais si 2 des 3 rapports de longueurs $\dfrac{AM}{AB}, \dfrac{AP}{AC} et \dfrac{MP}{BC}$ ne sont pas égaux,

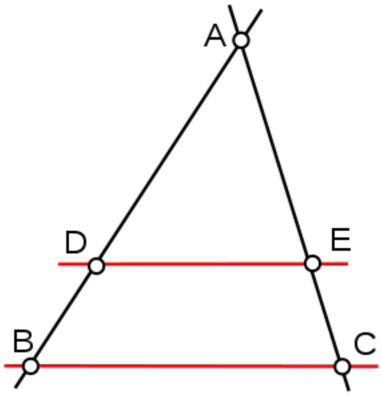
alors,

les droites (MP) et (BC) ne sont pas parallèles.

Dans ce cas on ne cherche plus à calculer des longueurs comme avec le théorème de Thalès, puisqu'il faut les avoir pour utiliser cette propriété.

La conséquence du théorème de Thalès sert à prouver que deux droites ne sont pas parallèles.

3.2 Exemple



Sur la figure ci-contre, on donne : $AD = 3cm$, $AB = 10cm$, $AE = 4cm$ et $AC = 12cm$. Montrer que les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.

Solution rédigée : On sait que :

- (BD) et (EC) sont deux droites sécantes en A,
- $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{3}{10} = 0,3$ et $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{4}{12} \simeq 0,333...$ donc $\dfrac{AD}{AB} \neq \dfrac{AE}{AC}$.

Donc d'après la conséquence du théorème de Thalès :
Les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.

4 Réciproque du théorème de Thalès

La réciproque (si on change données et conclusion) du théorème de Thalès n'est pas toujours vraie. Pour qu'elle le soit il faut lui ajouter une donnée supplémentaire :

4.1 Enoncé

Réciproque du Théorème de Thalès

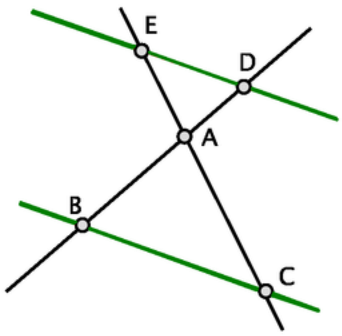
Si :
- (MB) et (NC) sont deux droites sécantes en A,
- $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AP}{AC}$,
- et si en plus les points A,M et B sont alignés **dans le même ordre** que les points A,P et C

alors,
les droites (MP) et (BC) sont parallèles.

Remarque : On a pas besoin d'avoir l'égalité des 3 rapports de longueurs mais seulement des 2 qui font intervenir les droites sécantes.

La réciproque du théorème de Thalès sert à prouver que deux droites sont parallèles.

4.2 Exemple



Sur la figure ci-contre, on donne : $EA = 5cm$, $AC = 30cm$, $AD = 4cm$ et $AB = 24cm$. Prouver que les droites (ED) et (BC) sont parallèles.

Solution rédigée : On sait que :

- (BD) et (EC) sont deux droites sécantes en A,
- $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$ donc $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.
- de plus les points A, B et D sont alignés dans le même ordre que les points A, C et E

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès :
Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

5 Bilan : quelle propriété utiliser ?

Dans tous les cas, il nous faudra deja nous trouver dans une configuration qui nous fait penser au théorème de Thalès : 2 droites sécantes et 5 points.

Quelle est la question ?	Quelle propriété utiliser ?	De quoi a-t-on besoin ?
Calculer une longueur	Théorème de Thalès	2 droites parallèles
Prouver que 2 droites ne sont pas parallèles	Conséquences du théorème de Thalès	2 rapports différents
Prouver que 2 droites sont parallèles	Réciproque du théorème de Thalès	2 rapports égaux + des points alignés dans le même ordre