Systèmes de deux équations à deux inconnues

1 Généralités

1.1 Premier exemple

On achète dans une boulangerie 4 croissants et 2 pains au chocolat pour un total de 4,7 euros. Pour calculer le prix des croissants et des pains au chocolat, appelons les x et y . On obtient alors l'équation suivante : $4x+2y=4,7$.

On s'appercoit alors que la méthode de résolution d'une équation à une inconnue ne fonctionne pas. Chercher une solution à cette équation, c'est trouver un nombre x **et** un nombre y pour que l'égalité soit vraie. On peut remarquer que $x=0,5$ et $y=1,35$ est une solution de l'équation car :
$4\times x+2\times y=4\times 0,5+2\times 1,35=2+2,7=4,7$
On dit alors qu'on a trouvé un *un couple de solutions*, ici le couple {0,5 ; 1,35}.

Mais on s'appercoit également qu'on peut trouver d'autres couples de solutions : {0,6 ; 1,15} ou {0,7 ; 0,95} ...Donc si on veut trouver le prix de nos croissants et pains au chocolat, il nous faut une autre informations : une deuxième équations !

1.2 Système de 2 équations à 2 inconnues

? Résoudre un système

Résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues, c'est trouver un couple de nombres $\{x, y\}$ pour que les 2 égalités soient vraies.

Exemple :

On retourne dans la même boulangerie le lendemain et on y achète 3 croissants et 1 pain au chocolat pour un total de 3,1 euros. On a donc une deuxième équations : $3x+y=3,1$. On peut alors écrire les 2 équations comme un *système* :

$$\begin{cases} 4x+2y=4,7 & \text{(E1)} \\ 3x+y=3,1 & \text{(E2)} \end{cases}$$

Pour faciliter les explications par la suite on met un numéro, ou un nom derrière les équations afin de les distinguer.

Ici on peut remarquer que le couple {0,75 ; 0,85} est une solution du système car si on remplace x par 0,75 et y par 0,85 les 2 égalités sont vraies :
Dans l'équation (1) : $4x+2y=4\times 0,75+2\times 0,85=3+1,7=4,7$
Dans l'équation (2) : $3x+y=3\times 0,75+\times 0,85=2,25+0,85=3,1$
On vient donc de *vérifier* que le couple {0,75 ; 0,85} est bien une solution du système.

2 Méthodes de résolution

Pour résoudre un système d'équations, on peut utiliser les mêmes propriétés que celles utilisées pour résoudre une équation à une inconnue.

2.1 Par substitution

Principe de la méthode

Le principe de la méthode par substitution est :
- d'*écrire une inconnue en fonction de l'autre* dans une des 2 équations,
- puis de *substituer* cette écriture dans l'autre équation pour se ramener à une équation à une seule inconnue.

Exemple :

Appliquons cette méthode à notre système :

$$\begin{cases} 4x+2y=4,7 & \text{(E1)} \\ 3x+y=3,1 & \text{(E2)} \end{cases}$$

L'équation (2) peut s'écrire : $y=3,1-3x$ (on vient d'écrire y en fonction de x).
On remplace ensuite y par son écriture $3,1-3x$ dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} 4x+2y &= 4,7 \\ 4x+2\times(3,1-3x) &= 4,7 \end{aligned}$$

On résout ensuite comme une équation du premier degré à une seule inconnue :

$$\begin{aligned} 4x+2\times 3,1-2\times 3x &= 4,7 \\ 4x+6,2-6x &= 4,7 \\ -2x+6,2 &= 4,7 \\ -2x+6,2-6,2 &= 4,7-6,2 \\ -2x &= -1,5 \end{aligned}$$

Finalement en divisant par (-2) chaque membre : $x=0,75$
On remplace ensuite cette valeur de x dans l'équation (E2) :

$$y=3,1-3x=3,1-3\times 0,75=3,1-2,25=0,85$$

On a finalement trouvé la solution du système : le couple {0,75 ; 0,85}. Il ne reste plus qu'à vérifier que ce couple est bien solution du système (on l'a deja fait dans la première partie de cette leçon).

2.2 Par combinaisons linéaires

Principe de la méthode

Le principe de la méthode par combinaisons linéaires est :
- de *multiplier les 2 équations* par des nombres bien choisis,
- puis d'*additionner les 2 équations* membre à membre afin de *supprimer* une des 2 inconnues.

Exemple :

Dans nontre système si on ajoute membre à membre notre système, on obtient :

$$\begin{cases} 4x+2y=4,7 & \text{(E1)} \\ 3x+y=3,1 & \text{(E2)} \end{cases}$$

$$(E1)+(E2) \Rightarrow 7x+3y=7,8$$

Cela ne nous avance pas puisque l'on a pas éliminer une des 2 inconnues.
Essayons de multiplier les 2 équations par des nombres bien choisis :

$$\begin{cases} -4x-2y=-4,7 & \text{(E1)}\times(-1) \\ 6x+2y=6,2 & \text{(E2)}\times(2) \end{cases}$$

$$\text{(E1)}\times(-1)+\text{(E2)}\times(2) \Rightarrow 2x=1,5$$

On obtient alors une équation où il n' y a plus de y ! Il suffit alors de la résoudre (en divisant par 2 chaque membre dans notre cas) :

$$x=0,75$$

Puis pour finir, on remplace dans une des 2 équations du départ x par sa valeur 0,75 et on résout l'équation à une inconnue :

$$\begin{gathered} \text{(E1)} \Rightarrow 4\times 0,75+2y=4,7 \\ 3+2y=4,7 \\ 2y+3-3=4,7-3 \\ 2y=1,7 \\ y=0,85 \end{gathered}$$

On a finalement trouvé la solution du système : le couple {0,75 ; 0,85}.
Il suffit pour finir de vérifier que ce couple est bien solution du système comme on l'a fait dans la première partie du cours.

3 Systèmes et fonctions

Dans un système, on peut parfois écrire les 2 équations sous la forme $y=\dots$ (y en fonction de x). Par exemple (E1) peut s'écrire :

$$\begin{gathered} 4x+2y=4,7 \\ 4x+2y-4x=4,7-4x \\ 2y=4,7-4x \\ y=2,35-2x \text{ (On a divisé par 2 chaque membre)} \end{gathered}$$

De même (E2) peut s'écrire :

$$\begin{gathered} 3x+y=3,1 \\ y=3,1-3x \end{gathered}$$

On peut donc voir les 2 équations (E1) et (E2) comme 2 fonctions affines f et g :

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 2,35 & \text{(E1)} \\ g(x) = -3x + 3,1 & \text{(E2)} \end{cases}$$

Résoudre le système revient alors à trouver les coordonnées $\{x, y\}$ du point d'intersection des 2 droites.
En traçant ces 2 fonctions dans un repère (voir chapitre fonctions) on retrouve la solution du système : $\{0,75; 0,85\}$