Racines Carrées

1 Définition et Généralités

1.1 Rappels

Lorsque l'on **multiplie un nombre par lui même** on dit qu'on a effectué le **carré** de ce nombre (ou que l'on a élevé ce nombre au carré).
Exemple : $5 \times 5 = 5^2 = 25$.

Le résultat est **toujours un nombre positif** !
Exemple : $(+3) \times (+3) = (+3)^2 = (+9)$ mais $(-3) \times (-3) = (-3)^2 = (+9)$ aussi !

1.2 Définition et Notation

Racine Carrée
Lorsqu'une nombre a est **positif**, on appelle **racine carrée de a** le nombre **positif** dont le carré est a.
Ce nombre se note $\sqrt{a}$.
Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle un **radical**

Exemple :
- La racine carrée de 16 est 4 car $4^2 = 16$. On note $\sqrt{16} = 4$.
- La racine carrée de 49 est 7 car $7^2 = 49$. On note $\sqrt{49} = 7$.

1.3 Remarques :

- $(-4)^2 = 16$ mais -4 **n'est pas** la racine carrée de 16 car d'après la définition la racine carrée est un nombre **positif**.
- Les **nombres négatif** comme (-25) **n'ont pas de racine carrée** car si il en avait une, on aurait un nombre dont le carré donne un résultat négatif. Ce qui n'est pas possible !
  $(+?)^2 = (+?) \times (+?) = (-25)$ impossible !
  $(-?)^2 = (-?) \times (-?) = (-25)$ impossible !
  Donc l'écriture $\sqrt{-25}$ n'a pas de sens !

2 Calcul d'un racine carrée

2.1 Calcul de tête

nombre a	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
$\sqrt{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

2.2 A la calculatrice

Si on tape $\boxed{\sqrt{(}}$ 18,49 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{EXE}}$, la calculatrice affiche $4,3$. C'est une valeur **exacte**. On peut donc noter sur notre cahier : $\sqrt{18,49} = 4,3$.
Par contre, si on tape $\boxed{\sqrt{(}}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{EXE}}$, la calculatrice affiche $1,41421356237\ldots$ C'est une valeur **approchée** ! On note alors sur notre cahier : $\sqrt{2} \approx 1,4142$ (ici **la valeur exacte est $\sqrt{2}$** !)

3 Propriétés

Carré d'une racine carrée

Lorsque le **nombre a est positif**, $\sqrt{a}$ est une écriture qui a un sens et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples :

- $(\sqrt{5})^2 = 5$
- $(\sqrt{432})^2 = 432$
- $(\sqrt{-7})^2$ n'existe pas car la racine carrée d'un nombre négatif $\sqrt{-7}$ n'a pas de sens !

Racine carré d'un carré

Lorsque le **nombre a est positif**, $(\sqrt{a^2}) = a$.

Exemples :

- $\sqrt{8^2} = 8$
- $\sqrt{713^2} = 713$

Remarque :

Attention ! Dans le calcul $\sqrt{(-6)^2}$, **la propriété ne s'applique pas** mais cette expression a bien un sens malgré le signe $-$. En effet, ici, on a la racine carrée de $(-6)^2$ qui fait $+36$ et c'est donc la racine carrée d'un nombre positif !
On peut donc faire quand même le calcul même si la propriété ne s'applique pas :
$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{+36} = +6$

4 Equations $x^2 = a$

Dans l'énoncé, on nous donne une nombre a. Résoudre l'équation $x^2 = a$, c'est trouver tous les nombres x (si ils existent) tels que leur carré fait a.

Résolution

Le nombre a étant donné, il y a 3 cas :

- Si $a < 0$ alors l'équation n'a pas de solution.
- Si $a = 0$ alors l'équation a une seule solution $x = 0$.
- Si $a > 0$ alors l'équation a 2 solutions $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

Exemples :

- Résoudre $x^2 = 49$. Ici $a = 49$ est positif, donc l'équation a 2 solutions $x = \sqrt{49} = 7$ et $x = -\sqrt{49} = -7$.
- Résoudre $x^2 = 0$. Ici $a = 0$, donc l'équation a 1 seule solution $x = 0$.

- Résoudre $x^2 = 12$. Ici $a = 12$ est positif, donc l'équation a 2 solutions $x = \sqrt{12}$ et $x = -\sqrt{12}$ (on garde les valeurs exactes $\sqrt{12}$ et $-\sqrt{12}$ plutôt que les valeurs approchées données par la calculatrice.
- Résoudre $x^2 = -36$. Ici $a = -36$ est négatif, donc l'équation ,'a pas de solution.

5 Propriétés de calcul avec les racines carrées

Produit de 2 racines carrées

Pour n'importe quels nombres ***a* et *b* positifs ou nuls**, on a : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Remarque et exemples :

Cette propriété est à connaître dans les 2 sens.

- La calculatrice ne donne qu'une valeur approchée de $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{12}$. Pourtant, on peut simplifier $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ en utilisant la propriété :
  $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$
- De même pour simplifier $(\sqrt{4})^3$:
  $(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{4} = \sqrt{4 \times 4} \times \sqrt{4} = \sqrt{16} \times \sqrt{4} = 4 \times \sqrt{4} = 4\sqrt{4}$
- Ou encore en utilisant la propriété dans l'autre sens on peut écrire $\sqrt{18}$ sous la forme $a\sqrt{b}$:
  $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Quotient de 2 racines carrées

Pour n'importe quels nombres ***a* et *b* positifs ou nuls**, on a : $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Remarque et exemples :

Cette propriété est à connaître dans les 2 sens.

- La calculatrice ne donne qu'une valeur approchée de $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{75}$. Pourtant, on peut simplifier $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ en utilisant la propriété :
  $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$
- De la même manière : $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{7}{14}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
  Il est préférable de ne pas laisser de radical au dénominateur. Pour enlever le $\sqrt{2}$ du dénominateur, on peut procéder de cette manière :
  $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Remarque importante

Il n'existe pas de propriété concernant la somme ou la différence de 2 racines carrées.
Ainsi dans la plupart des cas $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a+b}$. De même dans la plupart des cas $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a-b}$.

Exemples :

- $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ n'est pas égale à $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$ n'est pas égale à $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$