Probabilités

1 Vocabulaire

Nous allons donner quelques définitions de mots de vocabulaire propres aux probabilités en nous servant d'exemples afin que ces notions soient moins abstraites.

1.1 Exemple 1 : Lancer d'un dé à 6 faces

? Définitions

Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, on ne peut pas prévoir à l'avance la face qui va apparaître. On dit qu'on effectue une *expérience aléatoire*.
Les résultats {1}, {2}, {3}, {4}, {5} ou {6} se nomment *événements élémentaires*.
L'ensemble de tous les événements élémentaires forme ce qu'on appelle *l'univers* de l'expérience aléatoire.
A partir de cet univers, on peut construire des événements un peu plus complexes. Par exemple "obtenir un 5 ou un 6" est un *événement* ; "obtenir un nombre pair" est un autre *événement*.

1.2 Exemple 2 : Lancer de deux pièces de monnaie

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, que l'on note le résultat, puis qu'on lance une deuxième pièce et qu'on note le résultat, on effectue une *expérience aléatoire* dont les *événements élémentaires* sont les suivants : {PP}, {FF} , {PF} ou {FP} avec P pour Pile et F pour Face.

2 Probabilité d'un événement

Lors d'une expérience aléatoire, on peut souvent définir de manière instinctive la probabilité qu'un événement se produise. On peut définir cette probabilité comme "la chance théorique" que cet événement se produise et on la note sous forme d'une fraction.

Dans l'exemple du dé il y a 1 chance sur 6 pour qu'on obtienne le nombre 4. On dit que la probabilité d'obtenir un 4 est $P(4) = \dfrac{1}{6}$

Dans l'exemple des 2 pièces, il y a une chance sur 4 d'obtenir l'événement {FF}. On dit que la probabilité d'obtenir {FF} est $P(\{FF\}) = \dfrac{1}{4}$

Remarques :

- Une probabilité est une fraction comprise entre 0 et 1.
- La probabilité d'un événement qui est certain de se produire est 1.
- La probabilité d'un événement qui ne peut pas se produire est 0.
- Avoir une probabilité de $\frac{1}{4}$ ne signifie pas que, si on effectue 4 fois de suite la même expérience aléatoire, on obtienne 1 bon résultat et 3 mauvais. Ce n'est qu'un résultat théorique !

3 Propriétés des probabilités

Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Par exemple avec le lancer de dé, la probabilité d'obtenir est chiffre pair est :
$P(pair) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Somme des probabilités

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.

Par exemple, toujours avec notre dé à 6 faces :
$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Contraire d'un événement

Si on note p la probabilité d'un événement, alors la probabilité de l'événement contraire est $1 - p$.

Par exemple, on a vu que la probabilité d'obtenir un 5 avec notre dé à 6 faces est de $P(5) = \frac{1}{6}$ donc la probabilité d'obtenir un chiffre qui n'est pas 5 est : $P(1, 2, 3, 4 ou 6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

4 Probabilité et fréquence

Fréquence

Lorsque l'on effectue plusieurs fois une même expérience aléatoire, on peut compter le nombre de fois qu'un événement se produit. *La fréquence* d'apparition de cet événement est le quotient du nombre de fois où il apprait par le nombre de fois où l'expérience aléatoire a été faite.

Par exemple on peut lancer notre dé à 6 faces 100 fois et compter combien de fois le chiffre 4 apparait. Disons qu'il apparait 27 fois pendant les 100 lancés. On dit alors que la fréquence d'apparition du chiffre 4 est :
$Fr(4) = \frac{27}{100}$.

Fréquence et probabilité

Si on répète la même expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel événement va se raprocher de sa probabilité théorique.

Toujours avec notre dé si on effectue un très grand nombre de lancers (1000, 10 000, 100 000...) et qu'on compte la fréquence d'apparition du chiffre 4, cette fréquence va devenir de plus en plus proche de la probabilité d'obtenir un 4 lorsque l'on augmente le nombre de lancés.

5 Arbre de probabilité

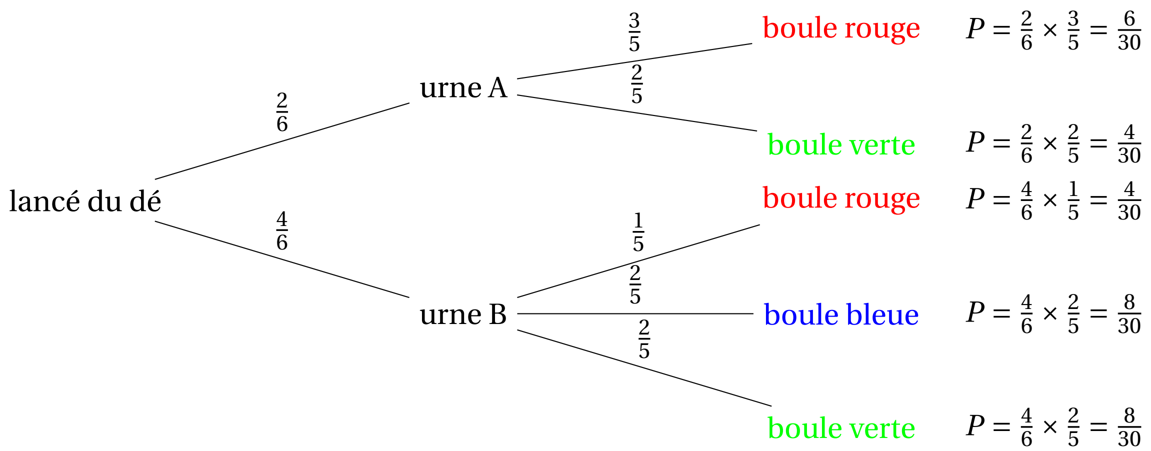
Pour déterminer des probabilités dans des cas un peu complexes, il est parfois pratique de représenter l'expérience aléatoire par ce qu'on appelle un *arbre de probabilité*.

Prennons pour exemple l'expérience aléatoire suivante : On lance un dé à 6 faces.

- Si le résultat est 1 ou 2 on pioche une boule au hasard dans l'urne A. L'urne A contient 2 boules vertes et 3 boules rouges.
- Si le résultat du dé n'est ni un 1 ni un 2, on pioche une boule au hasard dans l'urne B. L'urne B contient 1 boules rouge 2 boules bleues et 2 boules vertes.

Quelle est la probabilité de piocher au final une boule verte ?

Pour résoudre ce problème on réalise un arbre de probabilité :



Cet arbre se lit de gauche à droite. Chaque "branche" symbolise un résultat ou sous résultat possible. On lit donc les résultats finaux à droite. Sur chaque branche on y inscrit la probabilité de chaque sous expérience aléatoire.
Pour calculer une probabilité d'un événement final on mutiplie les probabilités de chaque branche par laquelle on passe.
En lisant notre arbre, on voit qu'il y a deux façons d'obtenir une boule verte. Donc la probabilité d'obtenir une boule verte est la somme des 2 probabilités correspondantes :
$P(verte) = \frac{4}{40} + \frac{8}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$