Inéquations

I. Généralités :

Lorsque l'on choisit 2 nombres, on a soit une **égalité,** soit une **inégalité**. Dans le deuxième cas, on utilise les symboles « < » (plus petit que) et « > » (plus grand que).

Exemples : 3 < 7 est une inégalité vraie. De même 23,6 > -11,7 est aussi une inégalité vraie.
Ou encore -32 < - 1 est encore une inégalité vraie (attention aux signes !).
6 > 7 est, par contre, une inégalité fausse.

Définitions : Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle se trouvent des lettres. Ces lettres représentent des nombres inconnus. On les appelle donc des inconnues.

Exemple : $2x-3<7-4\times(x+6)$ est une équation dont le membre de gauche est $2x-3$ et le membre de droite est $7-4\times(x+6)$.

Remarque : Dans les inéquations, on trouvera 2 nouveaux symboles $x\leq 4$ qui signifie « x est **inférieur ou égal** à 4 » et $x\geq 9$ qui signifie « x est **supérieur ou égal** à 9 ».

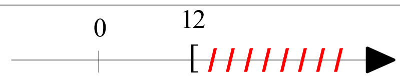
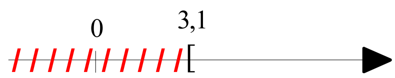
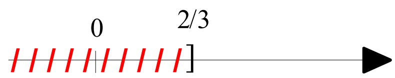
En troisième, nous nous intéresserons seulement aux inéquations du premier degré (pas de x^2, ni x^3...) à une seule inconnue (qu'une seule lettre à la fois).

Définition : **Résoudre une inéquation**, c'est trouver les valeurs que peut prendre l'inconnue afin que l'inégalité soit vraie.

Exemple : Dans l'inéquation $4x\geq 12$:
$x=5$ est une solution car $4\times 5=20\geq 12$. De même $x=3$ est une solution car $4\times 3=12\geq 12$.
Par contre $x=1$ n'est pas une solution car $4\times 1=4<12$
On vient ici de **vérifier** que 5 et 3 sont des solutions de l'inéquation mais que 1 n'en est pas une. On peut remarquer qu'il y a une infinité de solutions.

Notations : Pour désigner les solutions d'une inéquation, on le fait par une phrase en français ou bien à l'aide d'un axe gradué où l'on hachure les solutions.

Exemples :

Inéquations	Les solutions sont :	
$x\geq 12$	les nombres supérieurs ou égaux à 12.	
$x<3{,}1$	les nombres strictement inférieurs à 3,1	
$-4<x$	les nombres strictement supérieurs à -4	
$\frac{2}{3}\leq x$	les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{2}{3}$	

Remarque : Quand on représente les solutions graphiquement il faut faire attention au crochet sur la « valeur limite ». Quand cette « valeur limite » fait partie des solutions, le crochet est tourné vers les hachures rouges des solutions. Sinon il est tourné de l'autre côté.

II. Propriétés :

Propriété 1 : Si on **ajoute** (ou si on **soustrait**) le même nombre dans les 2 membres d'une inéquation, alors on obtient une nouvelle inéquation ayant les mêmes solutions que la première.

Propriété 2 : Si on **multiplie** (ou si on **divise**) par un même nombre **positif non nul** les 2 membres d'une inéquation, alors on obtient une nouvelle inéquation ayant les mêmes solutions que la première.

Propriété 3 : Si on **multiplie** (ou si on **divise**) par un même nombre **négatif non nul** les 2 membres d'une inéquation, alors on obtient une nouvelle inéquation **dont le sens a changé** mais ayant les mêmes solutions que la première.

Exemple : Si on multiplie les 2 membres de l'inéquation $7x \leq 5$ par **(-2) qui est négatif**,
on obtient l'inéquation : $-14x \geq -10$ qui a les mêmes solutions. ATTENTION AU CHANGEMENT DE SENS !

III. Résolution d'une inéquation :

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, on va se servir de ces 3 propriétés afin de se ramener petit à petit à des inéquations de plus en plus simples ayant toutes les mêmes solutions que celle de départ, de la même façon que l'on a fait avec les équations du premier degré. La seule différence sera quand on divisera (ou multipliera) par un nombre négatif (propriété 3)

Exemple 1 : résoudre $5x-4 \leq 3+7x$

$5x-4\mathbf{-7x} \leq 3+7x\mathbf{-7x}$ (propriété 1)

$-2x-4 \leq 3$ (on a réussi à ce que tous les x soient à gauche)

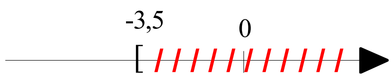
$-2x-4\mathbf{+4} \leq 3\mathbf{+4}$ (propriété 1)

$-2x \leq 7$ (on **divise** ensuite **par** le nombre de x : ici **-2** donc attention, c'est la **propriété 3**)

$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{7}{-2}$ **le sens de l'inéquation est donc changé !**

$x \geq -3{,}5$

Les solutions de l'inéquation sont donc les nombres supérieurs ou égaux à -3,5.



Exemple 2 : résoudre $9x+5 > 7+4x$

$9x+5\mathbf{-4x} > 7+4x\mathbf{-4x}$ (propriété 1)

$5x+5 > 7$ (on a réussi à ce que tous les x soient à gauche)

$5x+5\mathbf{-5} > 7\mathbf{-5}$ (propriété 1)

$5x > 2$ (on **divise** ensuite **par** le nombre de x : ici **5** donc cette fois c'est la **propriété 2**)

$\frac{5x}{5} > \frac{2}{5}$ **le sens de l'inéquation n'est pas changé !**

$x > \frac{2}{5}$

Les solutions de l'inéquation sont donc les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$