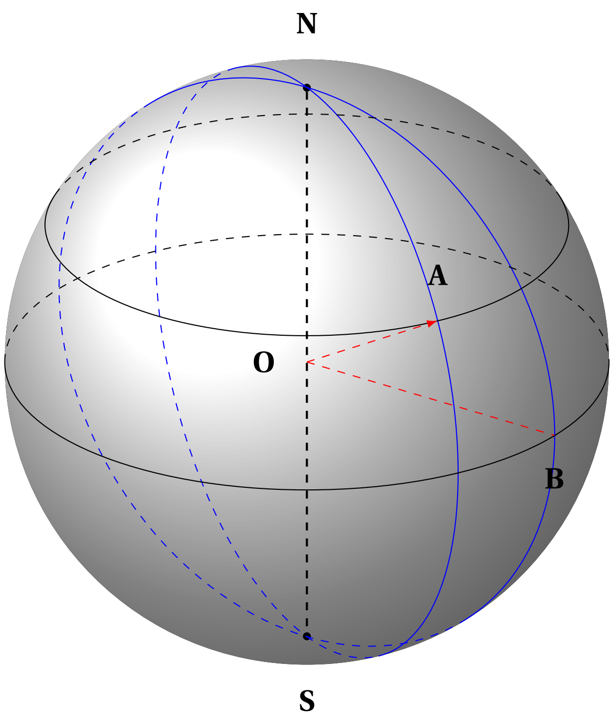
Géométrie dans l'espace

L'ensemble de ce chapitre traite de la géométrie dans **l'espace**, c'est à dire dans un environnement en 3 dimensions contrairement au **plan** du tableau ou de la feuille du cahier qui est en 2 dimensions.

1 Les sphères

Définitions

Soit O un point de l'espace et R un nombre positif fixé.
On appelle **sphère** de centre O et de rayon R l'ensemble des points qui sont situés exactement à une distance R du point O.
On appelle **boule** de centre O et de rayon R l'ensemble des points qui sont situés à une distance du point O inférieure ou égale à R.
On appelle **grand cercle** d'une sphère de centre O et de rayon R tout cercle de centre O et de rayon R.



Exemple :
La Terre peut être considérée comme une **boule** de centre O et de rayon R mesurant environ 6 400 km.
La figure ci-contre représente uniquement la **sphère** (surface de la Terre). On y a tracé 2 rayons en rouge : $OA = OB =$ 6 400 km.
En bleu, on a représenté 2 **grands cercles** de la sphère : leur centre est bien O et leur diamètre est $[NS]$.
L'équateur, en noir, est également un **grand cercle** de la sphère. Par contre, l'autre méridien, aussi en noir, n'est pas un **grand cercle** (même si c'est quand même un cercle, il a un rayon plus petit que celui de la sphère).

Aire et Volume

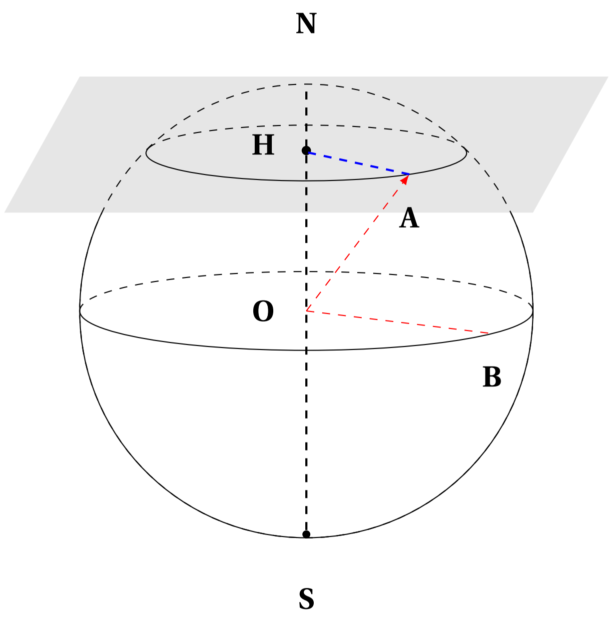
Pour une sphère de rayon R :
- **la surface** est donnée par la formule $S = 4\pi R^2$,
- **le volume** contenu à l'intérieur est donné par la formule $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Exemples :

- la surface d'une sphère de rayon 7 cm est égale à : $4 \times \pi \times 7^2 = 196\pi \simeq 616$ cm^2
- le volume de la boule de même rayon 7 cm est égal à : $\frac{4}{3} \times \pi \times 7^3 = \frac{1372}{3} \times \pi \simeq 1437$ cm^3

Section par un plan

La section d'une sphère par un plan, c'est à dire la figure obtenue quand on on coupe une sphère par un plan, est un cercle.



Exemple :

Si on appelle [NS] le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan et H le point d'intersection du plan avec le segment [ON], et R le rayon de la sphère, on a plusieurs possibilités :

- Si $0 < OH < R$ la section de la sphère de centre O et de rayon R par le plan est un cercle de centre H et de rayon HA. Pour tout point A de ce cercle, le triangle HOA est rectangle en H.
- Dans le cas particulier où $OH = 0$ le cercle obtenu est le grand cercle que l'on peut comparer à l'équateur de la Terre.
- Dans le cas particulier où $OH = R$ le cercle obtenu n'est plus que réduit à un point : le point N ou S. On dit alors que le plan est tangent à la sphère.
- Dans les cas où $OH > R$, le plan ne coupe tout simplement pas la sphère...

Exercice :

Le rayon de la sphère est $R = 5cm$ et le plan coupe cette sphère telle que $OH = 3cm$. Calculer le rayon du cercle de la section obtenue (c'est à dire HA).

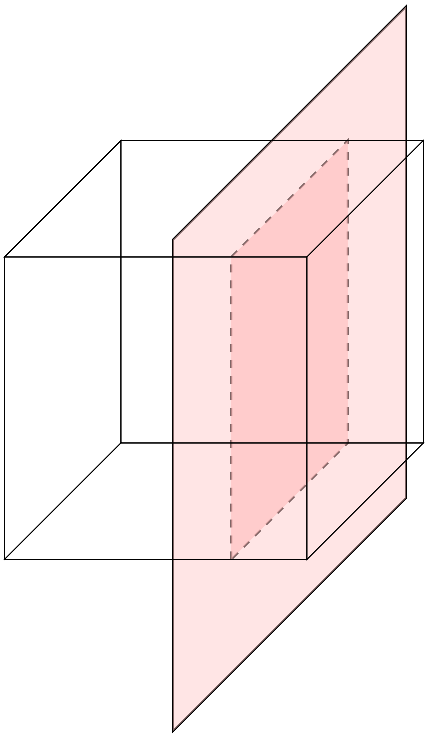
On sait que le triangle OHA est rectangle en H donc on peut utiliser le théorème de Pythagore : $OA^2 = OH^2 + HA^2$ soit $5^2 = 3^2 + HA^2$ ou encore $HA^2 = 25 - 9 = 16$ Donc $HA = \sqrt{16} = 4cm$.

2 Section d'un cube, d'un pavé, d'un cylindre par un plan

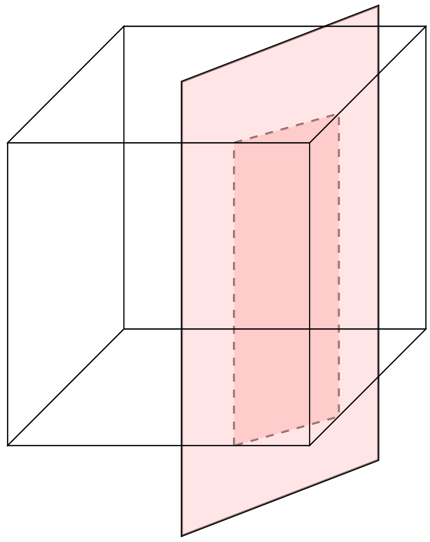
Section d'un cube

- La section d'un cube par un plan parallèle à une face est un **carré**.
- La section d'un cube par un plan parallèle à une arête est un **rectangle**.

Plan parallèle à une face :



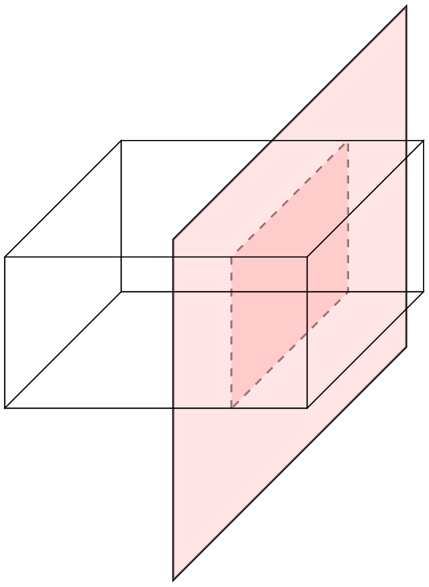
Plan parallèle à une arête :



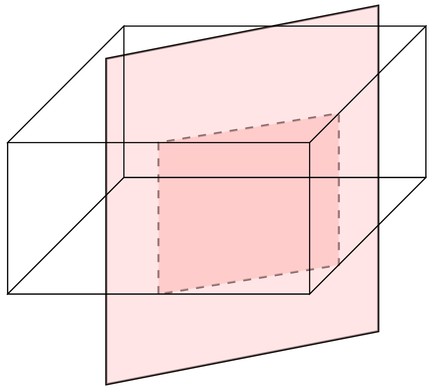
Section d'un pavé

- La section d'un pavé par un plan parallèle à une face est un **rectangle**.
- La section d'un pavé avec un plan parallèle à une arête est un **rectangle**.

Plan parallèle à une face :

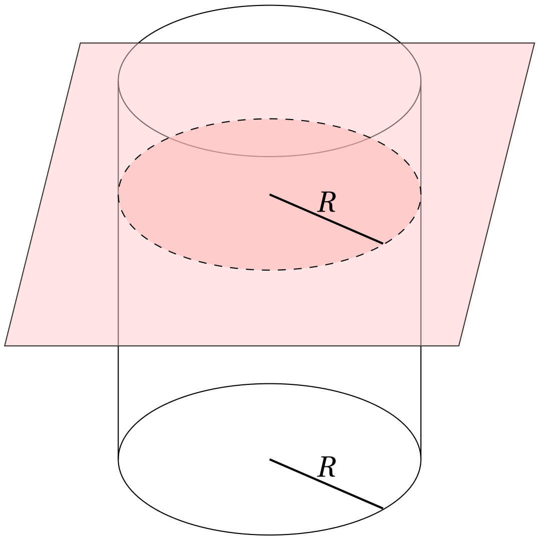


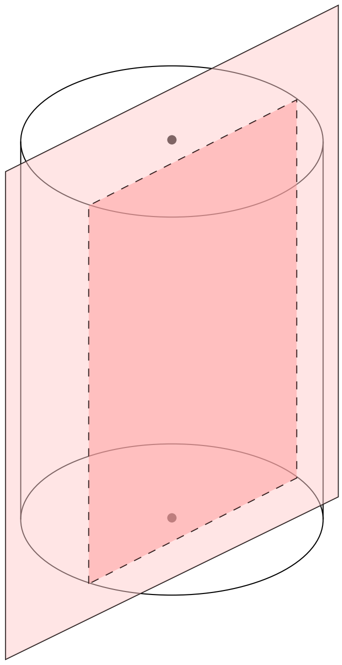
Plan parallèle à une arête :



Section d'un cyclindre

– La section d'un cyclindre par un plan parallèle à la base est un **cercle** dont le rayon est le même que le rayon de la base.
– La section d'un cyclindre avec un plan parallèle à l'axe est un **rectangle**.





3 Agrandissement, réduction

Quand on agrandit ou réduit une figure à la photocopieuse ou sur un modèle réduit ou tout autre dessin à l'échelle, les distances de "départ" et celles "d'arrivée" sont proportionnelles. On peut alors calculer un coefficient k d'agrandissement ou de réduction : $k = \frac{distances\ d'arrivée}{distance\ de\ départ}$.
Dans le cas d'un agrandissement on a $k > 1$ et dans le cas d'une réduction $k < 1$.
On peut souvent utiliser le théorème de Thalès dans une figure bien choisie pour calculer des longueurs grâce à ce coeeficient.

Coefficient de réduction

Quand le coefficient d'agrandissement (ou réduction) est k :
– les anciennes distances ont été multipliées par k pour donner les nouvelles distances.
– l'ancienne aire a été multipliée par k^2 pour donner la nouvelle aire.
– l'ancien volume a été multiplié par k^3 pour donner le nouveau volume.

Exemple :

Si un cube a pour côté $3cm$ et qu'on l'agrandit d'un facteur $k = 2$ alors toutes les nouvelles longueurs des arètes sont $3 \times 2 = 6cm$.

L'aire d'une ancienne face (un carré de 3 cm de côté) était $A = 3^2 = 9cm^2$. L'aire d'une nouvelle face sera donc $9 \times k^2 = 9 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36cm^2$. On retrouve bien qu'il s'agit de l'aire d'un carré de côté $6cm$.

Le Volume de l'ancien cube était $V = 3^3 = 27cm^3$. Le Volume du nouveau cube sera donc $27 \times k^3 = 27 \times 2^3 = 27 \times 8 = 216cm^3$. On retrouve bien qu'il s'agit du Volume d'un cube de côté $6cm$ ($6^3 = 216$).