Arithmétique

Dans tout ce chapitre nous n'utiliserons que des **nombres entiers** naturels.

1 Multiples et diviseurs

1.1 Definitions

? Multiples et diviseurs

Un **multiple** d'un nombre a est un autre nombre m qui est dans la table de multiplication de a.
On dit qu'un nombre d est un **diviseur** d'un nombre a lorque la division $a : d$ donne un résultat entier.

1.2 Exemples

- 7, 14, 21, 49, 77 sont des multiples de 7 : ils sont dans la table de multiplication de 7.
- 4 n'est pas un multiple de 8 car 4 n'est pas dans la table de 8. Par contre, au contraire, 8 est un multiple de 4.
- 1, 3, 4, 12 sont des diviseurs de 12.
- 4 n'est pas un diviseur de 10 car $10 : 4 = 2,5$ qui n'est pas un résultat entier !

2 Nombres premiers

2.1 Definition

? Nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier ayant exactement 2 diviseurs (ni plus, ni moins !).

2.2 Exemples

- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27 ... sont les 10 premiers nombres premiers. Ils ont tous 2 divieurs : 1 et eux même.
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1.
- 25 n'est pas un nombre premier car il a plus de 2 diviseurs : 1, 5 et 25.

Nombres premiers

Il y a une infinité de nombres premiers et à part 2, ils sont tous impairs.

3 Diviseurs communs

3.1 Definition

Diviseur commun

Soient a et b deux nombres entiers. On dit qu'un nombre d est un diviseur commun de a et b si d est à la fois un diviseur de a et un diviseur de b.

3.2 Exemples

- 3 est un diviseur commun de 12 et de 15.
- 5 est un diviseur commun de 35 et de 40.

Pour trouver les diviseurs communs de 2 nombres il est souvent utile de faire la liste de tous leurs diviseurs :
Diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36.
Diviseurs de 54 : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.
Donc les diviseurs communs de 36 et 54 sont : 1, 2, 3, 9 et 18.

3.3 Rappels : critères de divisibilité

Critères de divisibilité

- Un nombre est **divisible par 2** lorsqu'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair).
- un nombre est **divisible par 5** lorsqu'il se termine par 0 ou 5.
- un nombre est **divisible par 10** lorsqu'il se termine par 0.
- un nombre est **divisible par 3** lorsque la somme de ses chiffres donne un résultat qui est dans la table de 3.
- un nombre est **divisible par 9** lorsque la somme de ses chiffres donne un résultat qui est dans la table de 9.

3.4 Exemples

- 150 est divisible par 2 mais aussi par 5 et par 10.
- 615 est divisible par 3 car $6+1+5=12$ et 12 est dans la table de 3.
- 918 est dans la table de 9 car $9+1+8=18$ et 18 est dans la table de 9.

3.5 PGCD

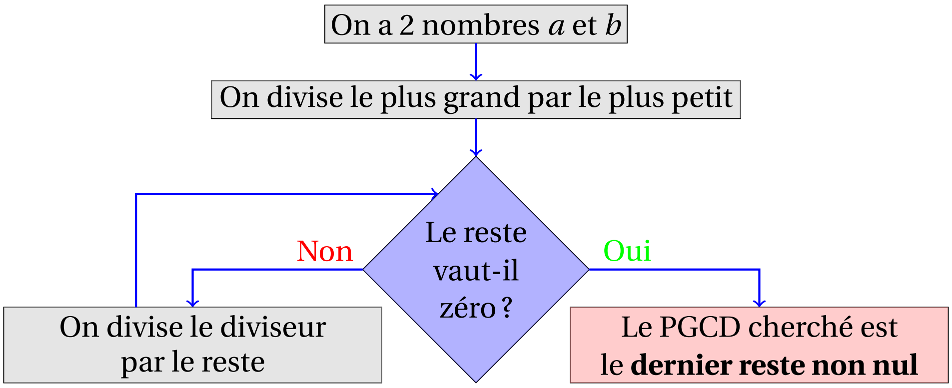
PGCD

On appelle **PGCD** de deux nombres a et b le plus grand de leurs diviseurs communs. PGCD est l'abréviation de **Plus Grand Commun Diviseur**.

Exemples :
Si on reprend les nombres 36 et 54, on a vu que leurs diviseurs communs sont : 1, 2, 3, 9 et 18 donc le PGCD de 36 et 54 est le nombre 18.
On peut noter de façon mathématique $PGCD(36,54)=18$.

3.6 Algorithme d'Euclide

Un algorithme est un procéssus composé d'une succession d'opérations simples et souvent répétitives à accomplir pour arriver à un résultat. On en trouve au coeur des programmes informatiques. Dans le cas qui nous intéresse, il existe des algorithmes pour calculer le PGCD de deux nombres. L'un d'eux est l'agorithme d'Euclide. Voici comment il fonctionne :



Exemple :
Calculons le PGCD de 2 277 et 1 449 par l'algorithme d'Euclide. On peut mettre les résultats dans un tableau en écrivant chaque sous résultat dans une ligne. On remplace dans chaque nouvelle ligne le nouveau dividende par l'ancien diviseur et le nouveau diviseur par l'ancien reste jusqu'à ce qu'on trouve un reste valant 0. **Le PGCD est alors le dernier reste non nul**.

Dividende	Diviseur	Reste
2 277	1 449	828
1 449	828	621
828	621	207
621	207	0

On trouve ici par l'algorithme d'Euclide : $PGCD(2277, 1449) = 207$.
L'algorithme d'euclide est surtout utile pour trouver le PGCD de deux nombres assez grands. Quand les deux nombres sont petits, on peut se contenter de faire la liste de leurs diviseurs.

4 Applications

4.1 Nombres premiers entre eux

? Nombres premiers entre eux
On dit que 2 nombres sont **premiers entre eux** si leur PGCD est 1 (c'est à dire que leur seul diviseur commun est 1).

Pour savoir si deux nombres assez grands sont premiers entre eux, on pourra donc utiliser l'algorithme d'Euclide pour montrer que leur PGCD vaut 1.

Remarque :
Il ne faut pas confondre 2 nombres premiers et 2 nombres premiers entre eux. Par exemple 15 et 8 sont premiers entre eux car ils n'ont comme diviseur commun que le nombre 1, mais ils ne sont pas du tout premiers !

4.2 PGCD et fractions

Pour simplifier une fraction, il faut chercher un diviseur commun du numérateur et du dénominateur.

fraction irréductible

une **fraction irréductible** est une fraction qu'on ne peut pas simplifier.

Par exemple $\frac{21}{18}$ n'est pas irréductible car on peut la simplifier par 3 : $\frac{21}{18} = \frac{7}{6}$.

Fraction irréductible et nombre premiers entre eux

Si deux nombre a et b sont premiers entre eux alors la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Par exemple, on a vu que 15 et 8 sont premiers entre eux, donc $\frac{15}{8}$ est irréductible.

Fraction et PGCD

Si on simplifie la fraction $\frac{a}{b}$ par le PGCD de a et b alors on obtient une fraction irréductible.

Par exemple, on a vu que $PGCD(2277, 1449) = 207$ donc en simplifiant $\frac{2277}{1449}$ par 207 on obtient une fraction irréductible :

$$\frac{2277}{1449} = \frac{2277 : 207}{1449 : 207} = \frac{11}{7}$$